584 — Of. Graf. da Liv. do Globo — P. Alegre

MANUAIS GLOBO

EDWARD LEE THORNDIKE

A NOVA METODOLOGIA DA ARITMÉTICA

EDIÇÃO DA LIVRARIA DO GLOBO - PÔRTO ALEGRE

...ULTURAL E PROFISSIONAL

Orlando de Alvarenga
Gaudio
Março - 1936

MANUAIS GLOBO

Os MANUAIS GLOBO destinam-se a proporcionar aos amantes das ciências e das artes uma verdadeira **Biblioteca de obras sintéticas** que melhor tratam da atividade mundial em todas as idades.

Abrangerão tudo o que é indispensável para se adquirir um lastro cultural sólido de todos os conhecimentos referentes às ciências e às artes, conhecimentos capazes de preencher os moldes da ilustração que se deve obter no século atual.

Os autores que subscrevem êsses manuais são figuras de comprovada e conhecida idoneidade científica, escolhidas entre nacionais e estrangeiros.

O PLANO GERAL desta biblioteca obedece a uma classificação muito intuïtiva e simples das ciências e artes. Toda ciência humana se reduz a três categorias, a saber: I — Meios de conhecer. II — Conhecimento das coisas. III — Princípios de ação deduzidos do conhecimento das coisas. De aí a distribuïção das ciências nos MANUAIS GLOBO em 13 secções compreendidas nas três categorias acima.

BIBLIOTECA DE INICIAÇÃO CULTURAL E PROFISSIONAL

MANUAIS GLOBO

MANUAIS GLOBO

BIBLIOTHECA DE INICIAÇÃO
CULTURAL E PROFISSIONAL

VOLUMES PUBLICADOS:

I — *H. Getzeny* — Capitalismo e Socialismo.
II — *Djacir Menezes* — Psychologia.
III — *Carlos Maximiliano* — Hermeneutica e Applicação do Direito, 2.ª ed.
IV — *Arturo Castelani* — Como funcciona e como se constrói uma estação receptora e transmissora de Televisão.
V — *Djacir Menezes* — Introducção á Sciencia do Direito.
VI — *E. Weiss* — Elementos de Psychanalyse.
VII — *Djacir Menezes* — Principios de Sociologia.
VIII — *Rev. G. Upton Krishke* — As Religiões do Mundo.
IX — *Djacir Menezes* — Pedagogia.
X — *Estevão Cruz* — Theoria da Literatura.
XI — *Pennell e Cusack* — Como ensinar a Leitura, traduzido pela Prof. Anadir Coelho.
XII — *Ed. Lee Thorndyke* — A Nova Methodologia da Arithmetica, traduzido pela Prof. Anadir Coelho.
XIII — *Ed. Burke Huey* — Psychologia e Pedagogia da Leitura, traduzido pela Prof. Anadir Coelho.
XIV — *Pe. Ignacio Puig, S. J.* — Astronomia Popular.

BIBLIOTECA DE INICIAÇÃO CULTURAL E PROFISSIONAL

A nova metodologia da Aritmética

EDWARD LEE THORNDIKE
ESCOLA DE PROFESSORES, UNIVERSIDADE DE COLÚMBIA; E. U. A.

A nova metodologia da Aritmética

TRADUÇÃO
DE
ANADYR COELHO
PROFESSORA DE PEDAGOGIA DA ESCOLA NORMAL DE PÔRTO ALEGRE

N.º 584

1 9 3 6
EDIÇÃO DA LIVRARIA DO GLOBO
Barcellos, Bertaso & Cia. — Pôrto Alegre
Filiais: Santa Maria e Pelotas

PREFÁCIO

Em "Psicologia da Aritmética" foram apresentadas pelo autor as mais recentes aplicações da psicologia dinâmica e da pedagogia experimental ao ensino da aritmética, em forma acessível a todos quantos abordam o assunto, como parte do estudo geral e sistemático da educação na escola primária.

O presente volume estuda, mais ou menos, o mesmo material, porém, do ponto de vista do professor ou do estudante de escola normal, procurando oferecer auxílio direto à boa inteligência dos mais novos métodos e sua aplicação dentro das condições ordinárias da classe. Nenhum conhecimento especial de psicologia foi tomado como base indispensável ao estudo proveitoso dêste livro. As longas discussões sôbre os fundamentos psicológicos gerais dos novos métodos e sua evidente superioridade sôbre os velhos, foram nele ou omitidas ou muito simplificadas. A maneira de tratar as questões é, sobretudo, construtiva. As conseqüências práticas dos princípios foram estudadas, de preferência, especìficamente e com exemplificação e aplicações copiosas e pormenorizadas.

Afim de auxiliar o professor, tanto quanto possível a pôr em prática os novos princípios de ensino, o autor fez seguir cada capítulo de uma série de exercícios (*) de natureza ainda mais minuciosa e concreta do que o texto.

Merece especial explicação o fato de todo o material ilustrativo das práticas correntes no texto, assim como o utilizado nos exercícios, haver sido tomado de um só compêndio. Assim o exigiam os imperativos da ciência e os da conveniência do estudante. Os da ciência, porque, cientìficamente, constitue quasi uma necessidade que todos os pormenores pertençam a um plano único de ensino, que todas as minudências sejam julgadas com referência ao conjunto, pois que um procedimento ótimo relativamente a determinado plano de ensino pode ser fraco ou mesmo nulo relativamente a outro. Os da conveniência do estudante, porque pràticamente parece desacertado exigir a consulta constante de mais de uma série de compêndios. Após estarem os fatos bem definidos na mente do estudante, tais como se desenvolvem em um compêndio ou plano total de ensino, então, convém que procure estudá-los em outro, segundo suas próprias possibilidades de tempo e facilidade.

Os compêndios escolhidos foram as aritméticas de Thorndike com as quais tem o autor relações

(*) N. do tr. — temas para discussão.

mais íntimas e que foram escritas com a finalidade expressa de aplicar "ao ensino da aritmética os princípios descobertos pela psicologia do aprendizado, pela pedagogia experimental e pela observação da prática escolar bem sucedida".

Outro aspecto dêste volume está a exigir explicação. Pode parecer que houve, da parte do autor, parcialidade para com os novos métodos. Tal juízo não será falso, em certo sentido. Porém não devemos esquecer que os velhos métodos são aqueles pelos quais aprendeu o leitor, aqueles que compreende e a que se habituou, aqueles para os quais o arrastam irresistìvelmente suas tendências inconcientes. Nestes termos, fazia-se mister que se tentasse algo a favor dos novos métodos, procurando estabelecer real imparcialidade. De fato, ainda a mais vigorosa das defesas difìcilmente logrará contrabalançar o predomínio dos métodos pelas quais aprendemos e que se tornaram parte de nós mesmos. Si estas páginas alcançarem pôr em relêvo a superioridade dos novos métodos e impô-los à confiança do leitor, terá a obra recebido o seu maior prêmio.

Escola de Professores, Universidade de Colúmbia.

OS NOVOS MÉTODOS DA ARITMÉTICA

CAPITULO I

REALIDADE

Os velhos métodos ensinavam a aritmética pela própria aritmética, sem consideração às necessidades da vida. Os novos métodos põem de relêvo os processos que a vida exige e os problemas que ela oferece.

CÁLCULO INDISCRIMINADO VERSUS CÁLCULO ÚTIL

Antigamente pensava-se que a aritmética tinha por finalidade única ensinar a somar, subtrair, multiplicar e dividir.

Os alunos, na escola, subtraíam nonos de vigésimos e multiplicavam $\frac{5}{54}$ por $\frac{9}{50}$ ainda que jamais tivessem de aplicar tais cálculos na vida prática.

O trabalho abaixo presta-se para ilustrar a espécie de cálculo que os compêndios e os mestres costumavam apresentar aos alunos e que os novos métodos tratam de substituir por exercícios que possam trazer benefícios diretos à vida real.

Reduzir a inteiros os números mixtos:

$$\frac{35}{15} \quad \frac{48}{51} \quad \frac{198}{14} \quad \frac{2134}{67} \quad \frac{413}{413} \quad \frac{6125}{3175}$$

Simplificar:

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{8}{9} \text{ de } \frac{3}{5} \text{ de } \frac{5}{22} \qquad \frac{7}{8} \text{ de } \frac{15}{18} \text{ de } \frac{4}{5} \text{ de } \frac{1}{36}$$

Reduzir à expressão mais simples:

$$\frac{357}{527} \quad \frac{264}{312} \quad \frac{492}{779} \quad \frac{418}{874} \quad \frac{854}{1789} \quad \frac{77}{847} \quad \frac{18}{243}$$

Elevar ao quadrado:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{6}{9} \quad \frac{10}{11} \quad \frac{12}{13} \quad \frac{15}{16} \quad \frac{19}{20} \quad \frac{17}{18} \quad \frac{41}{53}$$

Subtrair:

$$\begin{array}{ccccc} 6\frac{2}{7} & 8\frac{5}{11} & 8\frac{4}{13} & 5\frac{1}{4} & 7\frac{1}{8} \\ 3\frac{1}{14} & 5\frac{1}{7} & 3\frac{7}{13} & 2\frac{11}{14} & 2\frac{1}{7} \\ \hline \end{array}$$

Multiplicar:

$$60\times\frac{11}{28} \qquad 63\times\frac{2}{27} \qquad 65\times\frac{3}{13} \qquad 432\frac{3}{7}\times 42\frac{1}{12}$$

Muito mais de noventa por cento dos cálculos de aritmética que surgem na vida real são de números inferiores a cem. Aí está por que os novos métodos procuram fazer ressaltar a importância dos exercícios que dão facilidade e exatidão absolutas ao cálculo com números baixos. Exercícios como os seguintes:

Somar	Subtrair	Multiplicar	Dividir
46793	68750	7295	436905 | 217
128516	31925	6152	
91380			
20769			
8665			
73600			

deveriam ser efetuados raras vezes e com o fim único de provar que se podem resolver pelos mesmos métodos aprendidos para os cálculos de números pequenos.

Para a vida prática, o que importa na adição e na subtração de frações ordinárias, por exemplo, são os exercícios que se relacionam com frações de jarda, libra, dúzia, polegada e outras medidas de uso comum, utilizadas diàriamente na vida doméstica, no armazém, na loja, no comércio em geral.

A criança deve aprender a somar quintos a quintos, porque tais cálculos são necessários ao uso do cronômetro; mas não lhe é necessário exercitar-se em somar quintos a terços, porque, talvez, nem um aluno, em dez mil, será jamais solicitado a efetuar tal cálculo, depois que saia da escola.

AVALIAÇÃO DE JUROS

A diferença existente entre as duas espécies de cálculos de que estamos tratando, é notória no caso da avaliação de juros. E' prática muito divulgada ensinarem-se aos alunos cálculos de juros a qualquer prazo. De fato, são necessários muito maiores esforços para calcular os juros de determinada quantia ao prazo de 2a 6m e 9d, do que aos prazos de 30, 45, 60, 90 dias, 6 meses ou 1 ano. Entretanto, todo o cálculo de juros com que o aluno, um dia, terá de defrontar-se na vida, será sôbre êsses prazos comuns: As hipotecas são feitas mediante pagamento de juros anuais ou semestrais; quasi todos os emprésti-

mos bancários são realizados para períodos fixos e do mesmo modo renovados, (*) e até mesmo os empréstimos particulares, realizados sem formalidades, são, habitualmente, feitos com prazo fixo e data estipulada para o pagamento dos juros. Ademais, quando se trata de calcular juros de prazos não usados, utilizam-se, comumente, tabelas de juros.

Ora, neste caso, os novos métodos dedicam especial atenção à aritmética que possa ser, realmente, útil a uma pessoa que empresta dinheiro ou o toma emprestado, bem como à significação geral dos juros sôbre operações econômicas e de crédito comercial.

Os velhos métodos exercitavam o aluno, indiscriminadamente, no cálculo da taxa, do juro, do capital ou do tempo. Davam três dados para que o aluno achasse o quarto, sem se preocupar se na vida os problemas se apresentariam, por esta forma. Por exemplo:

A que taxa o capital:

a) \$240 em 1 ano e 9 meses rende \$29.40?
b) \$475 em 3 anos e 4 meses rende \$95.00?

Em que tempo:

a) \$400 produzirão \$62.06 $\frac{2}{3}$ a 7 por cento?
b) \$998 produzirão \$185.145 a 5 por cento?

Que quantia produzirá:

a) \$33.75 de juros em 2 anos e 3 meses a 6 por cento?
b) \$50.32 de juros em 5 anos e 27 dias a 8 por cento?

Tais problemas, é óbvio, teem importância insignificante ou mesmo nenhuma importância e são mais próprios para embaraçar o aluno do que a servir-lhe de guia. Em problemas reais, a taxa consta da letra ou da hipoteca e o tempo é fixado

(*) Com exceção está visto dos empréstimos a corretores de câmbio, que, entretanto, podem bem ser considerados como empréstimos feitos por um dia e renovados, caso em que os juros seriam sempre calculados com o auxílio de tabelas.

pelas circunstâncias; e, se alguém pensa em obter determinado rendimento, em seus cálculos conta com juros pagos a espaços regulares e do mesmo modo reempregados. Ninguém, em qualquer caso, fará planos, calculando o tempo que levará o seu capital para obter \$50.06 $\frac{2}{3}$ de juros ou quanto deverá empregar para receber \$50.32 em 5 meses e 27 dias.

PROBLEMAS REAIS

Os métodos tradicionais permitiam aos professores proporem qualquer problema, contanto que fôsse problema, embora imaginário, sem aplicação no mundo real. Os que seguem, são exemplos de problemas considerados satisfatórios pelos compêndios e professores de há vinte anos:

Alice tinha $\frac{3}{8}$ de dolar, Berta $\frac{11}{16}$, Maria $\frac{3}{25}$ e Nena $\frac{3}{4}$. Quanto possuíam juntas?

A mãe de Anita deu-lhe 40 maçãs para dividir com suas amiguinhas. Anita deu 2 maçãs e $\frac{2}{9}$ a cada uma. Quantas amigas tinha a menina?

Há 9 nozes em um *pint*. Quantos *pints* haverá em um monte de 6.789.582 nozes?

Dona Maria tem $\frac{3}{4}$ da idade do marido que tem 48 anos. Sua filha Alice tem $\frac{4}{9}$ da idade da mãe. Quantos anos tem Alice?

Suponhamos que um bolo perfeitamente redondo tenha $10\frac{1}{2}$ milhas de diâmetro. Se o cortarmos em 6 fatias iguais, de que tamanho será o lado curvo de cada uma?

Problemas como os acima citados, em situação real, só poderão aparecer num hospital de alienados.

Examinemos o seguinte:

Há ao fim da lição de leitura de Suzana, dez colunas de palavras novas a estudar e, em cada coluna, 32 palavras. Quantas palavras novas terá Suzana de estudar?

Êste não seria, talvez, irreal, si houvesse uma escola onde, em uma única lição, se exigisse que o aluno aprendesse 320 palavras novas.

Consideremos o modo hábil de calcular a espessura de uma tábua:

Com um prego de 5 polegadas, atravessou-se uma tábua de modo que ficaram fora dela, de um lado 2,419 polegadas e do outro 1,706. Qual a espessura da tábua?

E a inteligência e sobriedade de um cavalo que come de um fardo de alfafa exatamente 16 onças, nem mais um gramo;

Logo após se haver pesado uma tonelada de alfafa, um cavalo aproxima-se e come 1 libra dessa alfafa. Qual a razão da fração comida, relativamente ao que ficou?

E a natureza fútil e extravagante do seginte:

Um homem da altura de 6 pés pesa 175 libras. Qual será a altura de sua espôsa, sabendo-se que pesa 125 libras e é de estatura proporcional à do marido?

Os novos métodos estabelecem padrão mais alto para a seleção e organização de problemas, exigindo que não só ofereçam ao aluno oportunidade para raciocinar e aplicar conhecimentos de aritmética, senão que o levem a raciocinar sôbre aritmética em situações reais e a aplicá-la em condições semelhantes às da vida, de modo racional e útil, conduzindo-o a considerar a aritmética não apenas uma ginástica para a mente, mas um precioso auxiliar da vida prática.

Os novos métodos regeitam em particular os problemas que

se apresentam por forma oposta à dos correspondentes da vida real, aqueles que só poderiam ser forjados com o conhecimento da resposta.

"Gastei $\frac{2}{3}$ do dinheiro que possuía, com uma espingarda e a metade com uma barraca. Fiquei com $12. Quanto tinha?" ou "O senhor B. vendeu uma casa por $1500 ganhando assim 25 % de lucro sôbre o preço de custo. Quanto terá pago pela casa?" Ora, quem poderá saber que fez compras no valor de tantos terços ou tantos décimos do que possuía, se ignora quanto possue? e quem ignorará o custo de uma propriedade, depois de a haver adquirido? Sem deixar de atender aos objetivos por estes visados, os novos métodos tratariam de ajustá-los a situações reais. Assim, por exemplo, talvez redigissem o segundo da seguinte forma: "Um negociante vende automóveis com 25 % de lucro sôbre o preço de custo. Quanto terá pago pelo automóvel que vendeu a B. por $1500?"

Os novos métodos evitam, outrossim, os problemas que, não obstante apresentarem dados reais, não podem ser resolvidos como conviria. Por exemplo:· "Um agricultor comprou 160 mudas de pessegueiro, que plantou em renques de 24 mudas. Quantos renques foram plantados e quantas mudas restaram?" Êste problema, resolvido, daria 6 renques e 16 mudas. Ora, o que parece provável é que o agricultor plantaria as 16 mudas restantes em uma fila incompleta, ou, o que parece muitíssimo provável, também, não teria comprado 160, mas 150 mudas. Os novos métodos enunciariam o problema de modo diverso, eliminando todos os elementos que tenham pouca probabilidade de ocorrer na vida real. Diriam, por exemplo: "Um agricultor possuía 150 mudas de pessegueiro. Pensou em plantá-las em filas de 24 mudas. Calculou quantas filas poderia obter assim. Então, pôs de lado as mudas mais feias e fracas para que não fôssem utilizadas na formação das fileiras completas. Quantas mudas ficaram de lado?"

"Custando 3 ¢ uma maçã, quanto custarão 4 dúzias de maçãs?". Êste problema exige o cálculo $4 \times 12 \times 3$ ¢; porém o preço da dúzia, não é provàvelmente 12×3 ¢. Os novos

métodos o substituiriam por outro em maior concordância com a realidade, dizendo: "Um fruteiro vende maçãs a 3¢ cada uma. Em dúzia faz o desconto de 3¢. Quanto se deve pagar por 4 dúzias?"

A ARITMÉTICA PELA ARITMÉTIMA E A ARITMÉTIVA PARA A VIDA

Em geral, em toda a parte, os novos métodos procuram ensinar não meramente aritmética, mas a aritmética como auxiliar da vida. Procuram descobrir exatamente, em que e como cada fato numérico pode ser útil ao aluno não só enquanto freqüenta a escola, como depois que deixa de freqüentá-la, e em ensinar-lho de tal modo que lhe seja realmente proveitoso. Determinam os fatos reais com os quais cada fato ou princípio aritmético costuma ser relacionado e auxiliam o aluno a estabelecer tais conexões.

Assim, sendo as multiplicações 2 vezes 2, 3 vezes 2... até 10 vezes 2 e as divisões 4÷2, 6÷2... necessárias à vida e, desde cedo, às próprias crianças, que as vêem relacionadas com *quarts* e *pints* e com o custo de selos, as respectivas tabuadas devem ser ensinadas dentro de tais relações; aparecendo, comumente, as multiplicações 2 vezes 3, 3 vezes 3... até 10×3 e as divisões correspondentes associadas a pés e jardas, e as multiplicações 2 vezes 4, 3 vezes 4... até 10×4, e divisões correspondentes relacionadas a *quarts* e *galões*, as respectivas tabuadas devem ser ensinadas em tais conexões.

Êste modo de proceder não só vitaliza os exercícios, relacionando-os à realidade, como torna os próprios fatos da multiplicação e da divisão mais inteligíveis à mente infantil. O tempo gasto em aprender que há dois *pint* em um *quart*, três pés em uma *jarda*, quatro *quarts* em um *galão*, sete dias em uma semana, que um *niquel* é igual a cinco *centavos* e um *dime* é igual a dez *centavos*, é mais do que aproveitado pela compreensibilidade e pelo interêsse que acrescentam aos exercícios sôbre os fatos da multiplicação e da divisão.

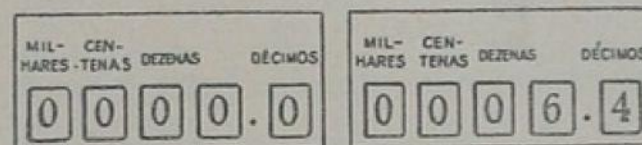
O velho sistema de ensinar as medidas, *pé, jarda, pint, quart, galão*, etc., isolados, em capítulo àparte, denominado "Números complexos", e a tabuada em outro capítulo, também isolada

dos demais fatos numéricos, tornava o aprendizado difícil e fastidioso e fazia perder uma bela oportunidade de colocar a aritmética ao serviço da vida.

O conhecimento das decimais é relacionado pelos novos métodos, como se mostra abaixo e às pgs. 8 e 9, com as marcações em décimos de milhas, que se registam em bicicletas e automóveis; com as tabelas de distâncias da estrada de ferro, onde aparecem centésimos de milha; com os registos de chuvas marcados pelo pluviômetro em milésimos de polegada e com os registos padrões da produção de manteiga, geralmente tomados em décimos milésimos de libra.

Medida de distâncias com um ciclômetro

MIL-HARES	CEN-TENAS	DEZENAS		DÉCIMOS
0	0	0	0 .	0

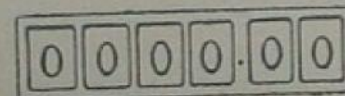
MIL-HARES	CEN-TENAS	DEZENAS		DÉCIMOS
0	0	0	6 .	4

O desenho da esquerda mostra o ciclômetro de Frederico, quando foi adquirido e colocado na bicicleta. O da direita mostra-o após um percurso de 6,4 mi. (ou $6\frac{1}{4}$ mi.).

1. Quanto marcará o ciclômetro depois de haver a bicicleta percorrido 2,3 mi. (ou $2\frac{3}{10}$ milhas) mais?

2. Como poderá Fred verificar a distância que percorreu em um dia ou em uma viagem?

3. Si o ciclômetro marcar 0071.2 às 9 horas e 0084.9 às 11, quantas milhas terá percorrido a bicicleta em duas horas?

Centésimos

0	0	0	0 .	0	0

Eis um ciclômetro especial que marca milhares, centenas, dezenas, unidades, décimos e centésimos de milha.

O pai de Alice possue um assim que coloca na bicicleta da filha.

Achar a distância percorrida em cada excursão, pelas marcações verificadas no ciclômetro, ao início e ao fim de cada uma.

	Partida	Chegada
1.ª excursão	0000.00	0011.46
2.ª "	0011.46	0016.89
3.ª "	0016.89	0050.03
4.ª "	0050.03	0067.20
5.ª "	0067.20	0078.50

Uma tabela de tempos e distâncias da Estrada de Ferro

Milhas		Hor. Min.
0	Part. New York	5.34
7,10	" High Bridge	5.52
8,06	" Morris Heights	5.55
8,73	" University Heights..	5.57
9,64	" Marble Hill	6.00
12,24	" Riverdale	6.08
13,68	" Ludlow	6.11
14,49	" Yonkers	6.18
15,58	" Glenwood	6.21
17,19	" Greystone	6.24
18,75	" Hastings	6.30
20,00	" Dobbs Ferry	6.35
21,03	" Ardsley	6.37
21,98	" Isvington	6.42
24,52	" Tarrytown	6.48

1. Leia esta tabela de horários.
2. Que estação fica a cêrca de vinte e duas milhas de New York?
3. Que estação fica a quasi $14\frac{1}{2}$ milhas de New York?
4. Que estação fica exatamente a $18\frac{3}{4}$ milhas de New York?
5. Que estação fica situada quasi exatamente duas vezes tão distantes de New York, quanto Riverdale?

Medidas pluviométricas

Queda de chuva por semana

(poleg.³ por poleg.² de área)

Junho	1– 7	1.056
	8–14	1.103
	15–21	1.040
	22–28	.960
	29–Julho 5	.950
Julho	6–12	.782
	13–19	.790
	20–26	.670
	27–Ag. 2	.503
Agôsto	3– 9	.512
	10–16	.240
	17–23	.215
	24–30	.811

1. Em que semana a chuva foi de 1 ou mais de 1?
2. Qual foi a semana de agôsto em que choveu mais?
3. Qual a semana mais sêca do verão? (mais sêca significa em que choveu menos).
4. Qual a semana mais próxima da mais sêca?
5. Em que semana choveu entre 0.800 e 1.000?
6. Examinar a tabela e calcular se a média de chuva, por semana, foi aproximadamente de 5, de 6, de 7, de 8 ou de 9.

Registos de Leitaria

"Star Elsie"

	Libras de leite	*Manteiga por libra de leite*
Jan.	1742	0,0461
Fev.	1690	0,0485
Mar.	1574	0.0504
Abr.	1226	0,0490
Maio	1202	0,0466
Jun.	1251	0,0481

Leia o registo do leite dado pela vaca "Star Elsie". A primeira coluna mostra o número de libras de leite fornecidos pela "Star Elsie" por mês. A segunda, mostra a quantidade de manteiga qua cada libra de leite continha.

1. Ler a primeira linha, dizendo: Em janeiro esta vaca deu 1742 libras de leite. Havia 461 décimos milésimos de libra de manteiga, em cada libra de leite.

Ler as outras linhas do mesmo modo.

2. Quantas libras de manteiga forneceu a vaca Elsie, em jan.? 3. Em fev.? 4. Em mar.? 5. Em abr.? 6. Em maio? 7. Em jun.?

Será útil ao leitor comparar esta maneira de ensinar as frações decimais com a de quinze ou vinte anos passados, verá que as ensinavam completamente divorciadas das situações da vida comum, sem utilidade prática, a não ser para um número reduzido de cientistas ou peritos em estatísticas.

Comparemos mais dois casos: (a) o ensino dos algarismos romanos e (b) o ensino da multiplicação de fração ordinária ou número mixto por fração. Os velhos métodos satisfaziam-se com dar uma noção geral da numeração romana, acompanhada de vários exercícios de aplicação. Tais exercícios eram às vezes fantásticos, como: "Quanto são CXVI e XIV? Subtrair CCXIV de MCII. Elsa achou XVI ovos numa semana e XIV, na semana seguinte. Quantos ovos achou?" Para os novos métodos, o problema principal está em ensinar a numeração romana, segundo as exigências da vida e em conexão com elas. Nós, por exemplo, e o leitor, provàvelmente, concordará conosco, resolveríamos a questão do seguinte modo:

Ensinaríamos a significação dos números de I a XII, porque são ainda hoje, comumente usados nos relógios; ensinaríamos a significação dos números de XIII a XXX, porque se encontram, a cada passo, na numeração de capítulos; aí, interromperíamos o ensino seriado para dar a significação de C e D, porque temos as nossas dúvidas de que se encontrem os números de XXXI a C, mesmo na numeração de capítulos, visto que, de ordinário, a maioria das pessoas não leem livros cujo número de capítulos exceda a trinta. E, se acontecer que alguém leia livros tão volumosos, poderá aprender fàcilmente o sistema no próprio livro. E' verdade que certos diagramas e quadros estatísticos são, às vezes, numerados com algarismos romanos e esta numeração alcança números elevados. Entretanto, raros dos graduados das escolas elementares, em toda a

vida, terão oportunidade de se defrontar com êles e, quando isso aconteça, não será sinão para copiá-los. Poderá talvez o leitor objetar: "Mas encontram-se datas escritas em algarismos romanos". Sim, encontram-se, mas com tão pouca freqüência, que nós mesmos não nos recordamos de se nos haver jamais deparado uma; logo, não nos parece que tenham tanta utilidade, que se justifique gastar-se com êles o tempo assaz precioso da escola elementar. Há porém, um emprêgo prático de romanos que nos ia esquecendo: M é usado para 1000, em certos negócios, por exemplo, no comércio de madeiras. Em resumo, ensinaríamos os algarismos romanos até XXX, nos primeiros anos, e a significação e aplicação de C, D e M, C para 100 D para 500, M para 1000, nos últimos anos. Os mais deixaríamos que os alunos aprendessem na própria vida, quando e onde dêles carecessem. Aquilo de que os alunos precisam é de saber como *interpretá-los*, como *entendê-los*. Jamais precisarão somar, subtrair, multiplicar ou dividir números romanos. Nós lhos ensinaríamos até XXX, ùnicamente para fazê-los compreender o sistema, não por mero exercício, por mera rotina. Relacioná-los-íamos com as suas aplicações mais importantes, como mostradores de relógios, capítulos de livros, etc. A significação de M ensinaríamos em conexão com a medida de madeiras.

Os nossos leitores poderão divergir um tanto sôbre os usos secundários de multiplicações como $2\frac{3}{4} \times 1\frac{1}{2}$, mas terão de concordar em que elas teem maior aplicação, e porisso merecem maior consideração, no cálculo de áreas de certos retângulos, como tapêtes, e da capacidade de caixas, cujas dimensões veem expressas em unidades diferentes da mesma espécie de medida, como jarda e pé, polegada e pé, jarda, polegada e pé, etc. Eis, pois, uma forte razão para ensinar-se o processo de avaliar volumes pelas três dimensões (comprimento, largura e altura) logo após à multiplicação de frações e não meses ou mesmo anos depois, como sucedia.

Seria útil, até certo ponto, considerarmos a freqüência com que ocorrem determinados fatos na boa prática do moderno ensino da aritmética. Por exemplo: Quantas vezes aparecerão, nessa prática, problemas expressamente "inventados" para ser-

virem ao ensino de determinado processo da aritmética? Quantos por cento das frações ordinárias nela usados ultrapassarão a meios, terços, quartos, quintos, oitavos, doze avos e dezesseis avos? Quantos por cento dos multiplicadores nela encontrados excederão a três algarismos? Veremos que tais problemas imaginários e irreais raramente aparecem na moderna prática do ensino de aritmética — salvo em casos em que o seu emprêgo possa trazer especial vantagem — que tais frações não constituem um cincoenta avos do número total dos casos de frações ordinárias que apresentam, e que os multiplicadores de quatro e cinco algarismos não constituem nem 1 por cento dos multiplicadores computados.

Os bons compêndios e os bons mestres estudam acuradamente cada exercício, cada trabalho que apresentam, afim de certificar-se de que, realmente, podem ter utilidade na vida do aluno. Procuram para cada princípio ou fato aritmético uma aplicação real a que possa ser associado na mente do aluno.

TEMAS PARA DISCUSSÃO

1. Substituir cada um dos problemas seguintes por outro que envolva o mesmo ou os mesmos princípios de aritmética, porém na forma em que se apresentaria na própria vida.

a) Um operário economiza $3\frac{5}{7}$ dólares por semana. Quanto economizará em um ano?

b) Dividiram-se 40 maçãs com um grupo de crianças, recebendo cada uma $\frac{4}{5}$ de maçã. De quantas crianças era formado o grupo?

c) Em uma escola há nove classes; em cada classe há 48 alunos; possuindo cada aluno 9 centavos, quanto possuirão juntos?

d) Achar o perímetro de uma sobrecarta que mede 5 polegadas por $3\frac{1}{4}$ polegadas.

e) $\frac{7}{8}$ do total da produção de papel de escrita em 1900, foi de 100.000 toneladas. Qual o total da produção?

2. Quais são as situações reais que exigem o emprêgo de "nas proporções de 2, 3, 5" e "nas proporções de 1 e 4", "2 partes de *a* para 4 partes de *b* para 5 partes de *c*" e assim por diante?

3. Em que situação se aprende a usar o calendário de um mês, que aparece no Livro I, pg. 36? (*) Pense em outros usos a que se aplique o dito calendário.

4. Em que situação é usado o calendário anual, no Livro I, pg. 102?

5. Ver como se pode relacionar a aritmética com a "economia doméstica", Livro III, pgs. 49, 74-77, 130, 184-186, 189-194, 197, 258 e 259.

6. Abaixo apresentamos vários processos de aritmética e vários fatos reais. Juntar cada processo a um fato com que se possa relacionar, dentro da realidade. Ex.:

a) 2 *c*) 7
b) 1 *d*) etc.

a) Adição de inteiros.
b) Subtração de inteiros.
c) Multiplicação de inteiros.
d) Multiplicação da moeda nacional.
e) Divisão de inteiros.
f) Divisão da moeda nacional.
g) Significação dos números de 40–60.

1. Idades de crianças.
2. Alturas de crianças.
3. Pesos de crianças.
4. "Scores" obtidos no jôgo do "Saco de Feijão".
5. Preço de um presente.
6. Plano de uma festa.
7. Custo das roupas de um "team" de "foot-ball".
8. Preço de livros de se-

(*) O autor, refere-se sempre, nestes exercícios, aos volumes I, II e III da aritmética de sua autoria.

h) Significação dos números de 60–100.

i) $\frac{1}{2}$ de 80 e $\frac{1}{4}$ de 80.

j) $\frac{1}{2}$ de 60 e $\frac{1}{4}$ de 60.

k) $\frac{1}{2}$ de 16 e $\frac{1}{4}$ de 16.

l) Soma de meios e terços.
m) Soma de meios e quartos.
n) Soma de quintos.
o) Desconto.

gunda-mão.
9. Preço de caramelos.
10. Venda de doces.
11. Venda de roupas.
12. Onças e libras.
13. O mostrador do relógio.
14. "Records" atléticos.
15. Percursos de viagem.

CAPÍTULO II

O INTERÊSSE

O INTERÊSSE DA ATIVIDADE MENTAL E DA OBTENÇÃO DE RESULTADOS

A aritmética faz forte apêlo a dois poderosos interêsses — o interêsse da atividade mental e o interêsse da obtenção de resultados. Muitas crianças gostam da aritmética, como gostam de quebra-cabeças, charadas, adivinhações, do jôgo de damas, do xadrez e outros jogos intelectuais, e pelas mesmas razões por que gostam dêstes. Quasi todas as crianças gostam de ter o seu trabalho bem definido, afim de saberem o que teem de fazer e quando o devem fazer, e experimentam prazer em agir, dominar difficuldades e fazer progresso.

A menos que seja muito mal ensinada, a aritmética constitue um dos melhores jogos intelectuais que a escola elementar pode oferecer aos alunos; é um trabalho bem definido, em que o aluno pode saber claramente o que tem de fazer, quanto fez e como realizou a sua tarefa. Os novos métodos aumentam a fôrça do apêlo de que falamos acima, tornando a aritmética um jôgo de maiores atrativos para os jovens cérebros e mais poderoso o estímulo do interêsse em obter resultados e dominar dificuldades.

Em primeiro lugar, tratam de libertar o estudo da aritmética de dificuldades inaplicáveis e de evitar esforços inúteis.

Vejamos a linguagem usada pelos compêndios e pelos professores de há 20 anos, na explicação de processos, na enunciação de problemas, etc.

Nas primeiras cincoenta páginas de oito bons compêndios de principiantes, do ano de 1900, mais ou menos, encontram-se palavras como: acrescentar, admitir, alternada, Albânia, Ásia, assembléia, Benjamin Franklin, bicarbonato, Boston, capacidade, Carlos Magno, ceder, concordar, credor, Cristóvão Colombo, cruzada, débito, equilíbrio, éra cristã, estere, Everest, fatura, falência, hectare, hectolitro, globo terrestre, mercadoria, Monte Branco, Napoleão, potência.

Mais da metade dos alunos, no último semestre do segundo ano ou nos primeiros meses do terceiro, simplesmente, não seriam capazes de ler, nem de compreender tais palavras. Encontravam tanta dificuldade em entendê-los, como se estivessem enunciados em grego. O exercício do pensamento era, assim, entravado por dificuldades invencíveis de linguagem, sem nenhuma aplicação e, portanto, sem nenhum valor, desviando-se do raciocínio aritmético.

Nas primeiras páginas dos compêndios para principiantes a que vimos nos referindo, aparecem para mais de cincoenta nomes próprios, inclusive Byron, Charlotte, Denver, Graham, Horace Mann, Lula, Morton e Oakland. O que os novos métodos perguntam é o que tem que ver com o aprendizado da aritmética do primeiro e do segundo ano, a capacidade de ler nomes próprios tão pouco usados? Por que arriscar-se a sacrificar o interêsse que pode despertar um problema e matar o desejo de achar a sua solução, usando tais nomes, em vez de Tom, Dick, Mary, um menino, uma menina, que aritmèticamente são tão importantes quanto Byron e Horace Mann?

Examinemos alguns problemas em que a dificuldade aritmética é mínima, ao passo que a de linguagem insuperável para um pequenino, um verdadeiro enigma:

1. Que quantia se poderá obter, juntando 8 centavos, 4 centavos, 7 centavos, e 6 centavos? Como se achará o resultado, somando ou multiplicando?
2. Quantas vezes teremos de esvaziar uma medida de um *peck* para encher de trigo uma cesta da capacidade de 64 *quarts?*
3. Se um menino memoriza 3 páginas de história em um dia, em quantos dias memorizará 9 páginas?

4. Se Ricardo possuísse 4 coelhos, quantas vezes poderia dar 2 coelhos a seus companheiros?
5. Se um jogador de "croquet" consegue passar a bola sob 2 arcos em cada golpe, quantos arcos passará em 3 golpes?
6. Se a mamãe corta um bolo em 4 partes e dá uma a cada pessoa, quantas pessoas poderá convidar para o jantar, tendo 4 bolos inteiros para a sobremesa?

Imaginemos um professor irrefletido que, após o fracasso de uma pobre criança em problemas das quatro operações em que entrassem combinações de 2, 3, 4, lhe perguntasse sarcàsticamente: "Então, você não sabe as tabuadas do 2 e do 3? Não sabe quantos são dois quatros? Pois êsses problemas são das tabuadas de 2, 3 e 4."

Os novos métodos insistem em que os compêndios e os mestres devem respeitar os interêsses vitais do aluno, fugindo de aborrecê-lo e cansá-lo com dificuldades inúteis de vocabulário ou de construção.

Consideremos o caso da cópia dos números que se devem somar, subtrair ou multiplicar. O esfôrço visual inerente à cópia de números é, minuto a minuto, muitas vezes superior ao esfôrço exigido pela leitura. E, se a criança tem outros deveres a fazer, o trabalho monótono tende a levá-la ao êrro, ainda que ponha o melhor de seus esforços e de sua vontade na execução da tarefa. Então, o raciocínio que aritmèticamente faz certo, dá resultado errado e a criança fica desanimada. O tempo requerido pela cópia de números, como por muitos dos trabalhos da escola primária, para grande parte dos alunos, é maior do que o tempo exigido pela solução do próprio trabalho de aritmética, em si mesmo. O simples trabalho de copiar é suficiente para matar o prazer de pensar.

Os novos métodos recomendam que, tanto quanto possível, a criança faça cópia de números apenas na medida indispensável ao adextramento e correção no escrevê-los e à formação e disposição dos mesmos. Ir além será em pura perda. É preciso frisar bem *que não se pode exigir que uma criança copie todos os números que emprega nos seus cálculos, assim como não se pode exigir que copie todas as histórias que tenha de ler.* Exa-

tamente como a sua tarefa principal relativamente às palavras consiste em lê-las, a sua tarefa mais importante relativa aos números consiste em calcular com êles.

Nos compêndios, grande parte dos exercícios de cálculo devem ser dispostos de tal modo, que a criança, colocando uma fôlha de papel sob uma linha ou ao lado de uma coluna de exercícios, tenha apenas o trabalho de escrever as respostas, nesta fôlha. Poderá, então, dobrar o papel e passar a uma segunda fila ou coluna. A não ser que o professor julgue necessário treinar os alunos na cópia e na disposição dos números, nas operações a que acima nos referimos, a maior parte dos exercícios de adição, subtração, multiplicação e divisão por um algarismo, podem ser feitos como explicámos.

No caso de multiplicação por multiplicador de dois algarismos, convém que sejam escritos, além do resultado, os produtos parciais.

A maior parte dos exercícios que se costumavam escrever no quadro negro para serem copiados devem, de preferência, ser distribuídos em fôlhas mimeografadas ou impressas, para que o aluno trabalhe na própria fôlha. Assim, não só há poupança de tempo e aumento de interêsse, como a fiscalização cresce em eficiência, visto que todos os alunos recebem o mesmo trabalho em papéis iguais e no mesmo lugar. Alguns modelos dos exercícios citados aparecem nas páginas seguintes (29—33), transcritos do nosso livro *Exercícios de Aritmética*. Desde a publicação do referido trabalho em 1909, e dentro dos moldes por êle fornecidos, teem sido impressas muitas séries de fôlhas de exercícios dêste gênero. A reconhecida utilidade de tal forma de exercício, sendo os trabalhos bem escolhidos e graduados, é uma sólida evidência das vantagens que decorrem da redução do trabalho da cópia de números.

Quando houver necessidade imprescidível de apresentar os exercícios no quadro negro, para que as crianças os copiem, é óbvio, que devem ser escritos com a maior clareza e bem espaçados. Deve-se, também, habituar a criança a facilitar o seu próprio trabalho, traçando algarismo bem legíveis e espaçando-os convenientemente. O êrro mais comum neste caso, consiste em escrevê-los muito juntos, e, em se tratando de frações, fazê-las demasiado pequenas.

Além de expurgar os trabalhos de aritmética de dificuldades inúteis e de evitar esforços também inúteis, é possível alimentar o interêsse da obtenção de resultados e do domínio de dificuldades, ajudando o aluno a ter conciência da meta a atingir, facilitando-lhe o conhecimento do próprio êxito e das próprias faltas e ensinando-lhe a medir o próprio progresso. Ao invés de se lhe dizer vagamente que estude certo tópico, determina-se-lhe: "Faça o trabalho desta página. Faça-o novamente e marque o tempo gasto em fazê-lo. Esforce-se até conseguir dar todas as respostas certas em doze minutos". Ao invés de aprender meramente a calcular, ficará conhecendo um meio de verificar o seu trabalho e alcançar 100 por cento de exatidão, se o desejar. Do tempo gasto, em tais verificações, não será perdido nem um segundo. Multiplicar 427 por 358 para verificar o produto de 358 por 427 é uma prática tão boa como outra qualquer. Multiplicar 58 por 27 e somar 17 ao produto é tão boa

Subtraia. Tire a prova, somando.

A. 1.	2.	3.	4.	5.
812	592	933	642	759
378	429	181	476	587

B. 8.	9.	10.	11.	12.
765	546	495	327	283
365	238	195	87	126

C.				
$5.25	$86.00	$1.50	$37.62	$3.75
1.75	56.32	.64	19.74	1.25

Procure os produtos. Tire a prova multiplicando.

1.	Verifique aquí.	2.	Verifique aquí.
232	24	312	26
24	232	26	312

4.		5.	
425	21	246	35
21	425	35	246
———	———	———	———

Escreva as respostas:

A.	B.	C.
$\frac{1}{2}$ de 6	$\frac{1}{3}$ de 27	$\frac{1}{5}$ de 35
$\frac{1}{2}$ de 10	$\frac{1}{2}$ de 18	$\frac{1}{5}$ de 30
$\frac{1}{2}$ de 8	$\frac{1}{3}$ de 18	$\frac{1}{6}$ de 30
$\frac{1}{3}$ de 12	$\frac{1}{6}$ de 12	$\frac{1}{3}$ de 21
$\frac{1}{3}$ de 15	$\frac{1}{2}$ de 16	$\frac{1}{8}$ de 32
$\frac{1}{4}$ de 8	$\frac{1}{2}$ de 14	$\frac{1}{8}$ de 16
$\frac{1}{4}$ de 40	$\frac{1}{9}$ de 18	$\frac{1}{8}$ de 48
$\frac{1}{5}$ de 40	$\frac{1}{4}$ de 36	$\frac{1}{6}$ de 48
$\frac{1}{6}$ de 18	$\frac{1}{4}$ de 32	$\frac{1}{6}$ de 60
$\frac{1}{8}$ de 56	$\frac{1}{7}$ de 35	$\frac{1}{4}$ de 28

F.

$\frac{2}{3}$ de 9	$\frac{4}{5}$ de 20	$\frac{3}{4}$ de 20
$\frac{3}{4}$ de 16	$\frac{3}{5}$ de 20	$\frac{3}{4}$ de 8
$\frac{2}{5}$ de 20	$\frac{2}{3}$ de 15	$\frac{3}{4}$ de 12

Escreva os inteiros e os números mixtos a que são iguais as frações seguintes:

A.	B.	C.	D.	
$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{10}{8}$	$1\frac{\quad}{8}$ ou $1\frac{\quad}{4}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{8}$	$\frac{14}{8}$	$1\frac{\quad}{8}$ ou $1\frac{\quad}{4}$
$\frac{8}{4}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{12}{8}$	$1\frac{\quad}{8}$ ou $1\frac{\quad}{4}$ ou $1\frac{\quad}{2}$
$\frac{11}{4}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{10}{6}$	1 — ou 1 —
$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{9}{6}$	$1\frac{6}{3}$ ou $1\frac{3}{2}$

A. Escreva os algarismos que faltam. Um × significa que nenhum algarismo dá certo.

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{\times}{3}$ $\quad \frac{\quad}{4}$ $\quad \frac{\times}{5}$ $\quad \frac{\quad}{6}$ $\quad \frac{\quad}{8}$ $\quad \frac{\quad}{10}$ $\quad \frac{\quad}{12}$

1/3 =	×/2	1/3	×/4	×/5	—/6	×/8	×/10	—/12
1/4 =	×/2	×/3	1/4	×/5	×/6	—/8	×/10	—/12
1/5 =	×/2	×/3	×/4	1/5	×/6	×/8	—/10	×/12
1/6 =	×/2	×/3	×/4	×/5	1/6	×/8	×/10	—/12
1/8 =	×/2	×/3	×/4	×/5	×/6	1/8	×/10	×/12

B. Escreva os algarismos que faltam, quando puder. Faça u ×, quando não houver um algarismo que dê certo.

2/3 =	—/2	—/3	—/4	—/5	—/6	—/8	—/10	—/12
3/4 =	—/2	—/3	—/4	—/5	—/6	—/8	—/10	—/12
2/5 =	—/2	—/3	—/4	—/5	—/6	—/8	—/10	—/12
5/6 =	—/2	—/3	—/4	—/5	—/6	—/8	—/10	—/12
3/8 =	—/2	—/3	—/4	—/5	—/6	—/8	—/10	—/12

ADIÇÃO

A.	37,846 1,02 8,109 70,61	31,1 20,988 71,37 52,63	9,246 18,09 44,17 45,763
B.	21,405 48,19 4,01 77,024	52,417 19,8 90,8 41,753	48,1 37,87 41,907 15,963
C.	1,09 8,64 1,6143 5,7086	3,275 9,01 5,98 8,1093	4,0125 1,5907 4,10 8,671

SUBTRAÇÃO

A.	10 8,481	47,18 36,297	9 8,809
B.	32 13,409	2, 1,5017	40,36 6,675
C.	0,92412 0,62	0,2547 0,13225	50 44,636

prática, quando usada como prova de 1409 | 58, como quan
feita independentemente. Se, em vez de um sinal ambíguo tr
çado sôbre um exercício, após exame apressado, o professor
der ao trabalho de explicar como se pode resolver com exatid
e rapidez certos casos específicos e difíceis, haverá 100 por cen
de aproveitamento para o aluno. Poderá êste comprovar os r
sultados obtidos com os atingidos a uma semana, um mês, u
ano atrás. Os testes padrões de Courtis, Woody e outros of
recem meios excelentes para a realização de tais comparaçõ
ano a ano.

De especial importância para o professor são os testes d
tipo "escala" que apresentam as questões em séries de dificu
dades graduadas das mais fáceis para as mais difíceis ou d
mais simples para as mais complexas. Si em cada passo se d
rem ao aluno quatro a cinco questões, como as que ilustram
páginas 23 e 24, êle se habituará a ver claramente onde está
seu ponto fraco.

A escala de adição compreende seis passos. O primeiro
o segundo requerem apenas a compreensão dos elementos d
processo de somar e capacidade em somar até nove. O tercei
apresenta a dificuldade de lidar com zeros nas parcelas. O qua
to contém somas até 9+9. No quinto, aparecem reservas, m
nenhum caso em que se tenha de escrever zero na soma da c
luna das unidades. No sexto, aparece esta dificuldade e també
zeros e claros nas colunas.

A escala de multiplicação, para uso do quinto ano, deixa d
parte os casos extremamente fáceis, chegando a atingir, no 1
e no 11º passo, casos bem difíceis de multiplicação de decimai
O seu fim principal é mostrar, de modo geral, as dificuldad
que o aluno pode dominar; mas presta-se, também, a denu
ciar e remover até certo ponto, certas dificuldades particulare
como as de colocar a vírgula (3º passo), lidar com zeros (4º e
passos), multiplicar frações por simples cancelamento, (6º pa
so), multiplicar frações que impliquem na escolha de métod
e no uso de partes alíquotas ou em trabalho complexo (7º,
e 9º passos).

Uma escala de adição

Comece no número 1 e veja até onde pode subir sem êrro.

6º passo.			25	17	16
	14	48	7	6	10
	9	19	19	30	9
	20	15	6	18	17
	27	34	13	15	8
	—	—	—	—	—
5º passo.				16	27
	16			28	19
	27	38	19	17	15
	19	49	37	26	28
	49	65	23	18	24
	—	—	—	—	—
4º passo.		8	6	8	6
	7	7	9	3	9
	5	9	6	7	8
	8	6	8	7	9
	7	6	9	5	4
	—	—	—	—	—
3º passo.	10	40	30	30	30
	21	30	10	10	12
	20	25	20	20	27
	14	12	20	13	30
	—	—	—	—	—
2º passo.	34	43	22	12	5
	2	5	31	43	62
	51	41	6	23	21
	—	—	—	—	—
1º passo.	21	21	12	54	32
	32	51	25	12	14
	15	24	21	33	42
	—	—	—	—	—

Uma escala de multiplicação

Eis aquí uma escala de multiplicação. Comece pelo n.º 1 e vá subindo até o n.º 11. Procure os produtos. Quando o resultado fôr uma fração ordinária, reduza-a à expressão mais simples.

11º passo. *a.* 0,65 × 104,7 mi. *b.* 0,625 × $10.50
c. 0,0325 × $103.25 *d.* $3\frac{5}{8} \times 4{,}6$ *e.* 0,0426 × 10904

10º passo. *a.* 90,04 × $925.00 *b.* 0,035 × $103.50
c. 0,75 × $1.20 *d.* 0,15 × 39,37 *e.* 0,06 × $5

9º passo. *a.* $12 \times \$\frac{5}{6}$ *b.* $24 \times 16\frac{2}{3}$ ¢ *c.* $36 \times 12\frac{1}{2}$ ¢
d. $8 \times 87\frac{1}{2}$ ¢ *c.* $\frac{3}{4} \times 1\frac{2}{3}$

8º passo. *a.* $9 \times 1\frac{1}{8}$ *b.* $5\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$ *c.* $25\frac{1}{2} \times \$120$
d. $16\frac{3}{4} \times \$500$ *e.* $7\frac{1}{2} \times 11\frac{3}{4}$

7º passo. *a.* $3\frac{1}{2} \times \$1.50$ *b.* $7\frac{1}{4} \times \$1.25$ *c.* $5\frac{8}{3} \times \$1.00$
d. $4\frac{3}{4} \times 144$ *e.* $2\frac{1}{3} \times \$1.00$

6º passo. *a.* $\frac{3}{4} \times 10$ *b.* $\frac{2}{3} \times 8$ *c.* $\frac{7}{8} \times 5$ *d.* $15 \times \frac{3}{5}$
e. $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$

	a.	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*
5º passo.	3,07 60	57,5 40	6,14 5,03	530 4, 6	30,9 40,7
4º passo.	605 20	225 20	224 102	850 27	980 506
3º passo.	9,3 2,1	$2.47 16	74 0,32	1,24 1,7	3,18 5
2º passo.	43 15	27 29	52 38	75 17	84 46
1º passo.	62 — 7	94 — 8	73 — 6	85 — 9	48 — 5

Finalmente, convém notar que das conquistas do ensino moderno, só figurarão, neste livro, as que possam contribuir para estimular o interêsse de pensar e realizar, e, dentre essas, as que facilitem o aprendizado e forneçam ao aluno conhecimento de real valia. A-pesar-de sua pouca reflexão, meninos e meninas, em geral, preferem instruir-se a ser ignorantes, a aprender o que é útil ao que não o é.

OUTROS INTERÊSSES

Além do interêsse que a aritmética provoca, como um jôgo, em que se empenha a mente para alcançar resultados e mostrar pujança e agilidade, vários outros interêsses existem para os quais devemos apelar, no ensino desta disciplina. Por exemplo, o trabalho se tornará mais interessante para a criança, na medida em que implicar em ação física e variedade, desenvolver-se numa situação de sociabilidade, oferecer uma oportunidade de vitória, um proveito prático, relacionar-se com alguém ou alguma cousa de que goste, e, acima de tudo, talvez, si se prestar à consecução de uma finalidade, de um objetivo que, no momento, esteja desempenhando papel importante em sua vida.

Eis a razão por que se deve tomar maior cuidado e pôr maior

habilidade na escolha, na organização e na apresentação dos fatos e dos princípios da aritmética. É indispensável que êsses interêsses atuem a favor do aprendizado e não contra êle, que não se reduzam, em aritmética, ao açúcar com que se adoça a pílula que deve ser engulida. Aquí, como em outros pontos, são fáceis os extravios, é fácil ir demasiado longe. Seria loucura querer transformar a aritmética em um mixto de ginástica e jôgo de salão ou esperar que surja, ao mesmo tempo, para os trinta alunos de uma classe, um motivo forte e vivo que exija determinado conhecimento, por ex., o das frações decimais.

Aos velhos métodos faltava habilidade e cuidado. As questões eram organizadas não só com evidente desprêzo da vida e dos interêsses da criança como, muitas vezes, com verdadeiro desrespeito aos interêsses vitais das diferentes fases de evolução psicológica.

Um a um, todos os problemas, eram do nivel de interêsse dos seguintes (3º ano):

1. Uma môsca tem 6 patas. Quantas patas teem 9 môscas?
2. Uma caixa tem 8 cantos. Quantos cantos teem 3 caixas?
3. Ernesto tem 64 botões. Quantas carreiras de 8 botões pode êle fazer?
4. João Smith depositou no First Nacional Bank $23.73 e, na semana seguinte, $16.952. Quanto depositou ao todo?
5. Em 1890, S. Luis tinha 460.357 habitantes, Boston, 447.720, Baltimore, 432.095 e S. Francisco 297.990. Quantos habitantes tinham as quatro cidades juntas?
6. Milton nasceu em 1608 e morreu em 1674. Quantos anos viveu?
7. O discurso de estréia do Presidente Lincoln continha 3500 palavras e o segundo 580. Quantas palavras continha o primeiro mais do que o segundo?

Um compêndio padrão de 1893, excelente para o seu tempo, aconselha o professor a variar os exercícios para manter a atenção da classe, e a usar, além dos exercícios impressos, outros cujos dados sejam:

Árvores .... macieiras, pinheiros, ameixeiras, figueiras, palmeiras, parreiras, etc.

Aves domésticas .... galinhas, pintos, perús, patos, gansos, marrecos, galos, etc.

Brinquedos .... bonecas, carrinhos, bolas, arcos, cestos, bolitas, soldadinhos, etc.

Flores .... rosas, cravos, margaridas, amores-perfeitos, lírios, violetas, popoulas, etc.

Frutas .... maçãs, pêras, laranjas, limões, pêssegos, uva, figos, cerejas, etc.

Generos alimentícios .... açúcar, chocolate, arroz, feijão, massas, chá, café, etc.

Insetos .... môscas, mariposas, abelhas, cascudos, borboletas, libélulas, grilos, etc.

Miüdezas .... botões, alfinetes, agulhas, carretéis, novelos, linha, moldes, tesouras, etc.

Partes da casa, móveis e utensílios .... portas, janelas, cadeiras, mesas, quadros, tapêtes, pratos, pires, garfos, facas, colheres, jarras, chícaras, etc.

Peças do vestuário ...... casacos, colêtes, vestidos, meias, botinas, sapatos, colarinhos, camisas, luvas, capas, gorros, etc.

Objetos de uso escolar .. lapis, penas, livros, papel, cadernetas, mapas, giz, apontadores, borrachas, etc.

Pássaros .... andorinhas, canários, papagaios, rouxinóis, pardais, gralhas, etc.

Profissões .... padeiro, açougueiro, leiteiro, ferreiro, etc.

Quadrúpedes .... cães, cachorrinhos, gatos, gatinhos, coelhos, bois, vacas, porcos, cavalos, ovelhas, cordeiros, cabras, cabritos, raposas, ratos, esquilos, macacos, etc.

Utensílios domésticos ... machados, ancinhos, vassouras, pás, martelos, pregos, baldes, etc.

Veiculos .... bondes, trens, automóveis, carros, carroças, bicicletas, carretas, caminhões, etc.

Verduras .... ervilhas, feijão, milho, batatas, cenouras, rabanetes, beterrabas, etc.

Tal era o conceito de interêsse nos velhos métodos: interêsse pela variedade!

Ao invés de apresentar problemas genuinamente vitais que a criança se empenhasse em resolver, em lugar de jogos sôbre corridas de automóveis, excursões, compras domésticas, em vez de exercícios sôbre a colocação dos ponteiros de um relógio, os velhos métodos nada melhor achavam para apresentar do que estatísticas sôbre os queijos de Wisconsin ou do abastecimento de água de New York ou sôbre o aumento de produção de trilhos de aço, quando não sôbre as mais desinteressantes minúcias de processos industriais.

Faziam-se esforços para utilizar os interêsses infantís na motivação dos trabalhos de aritmética, mas estava-se, as mais das vezes, muito longe de conseguí-lo, como se vê nos problemas que seguem:

1. Uma classe gasta 8 blocos de papel, por semana, nos seus trabalhos de aritmética. Quantos blocos serão necessários para o trabalho de um período de 20 semanas?
2. Um menino atira um disco a $18 \frac{1}{4}$ pés; outro, a $13 \frac{7}{12}$. Quantos pés mais longe do que o segundo atira o primeiro?
3. Uma equipe de "base-ball" ganhou 68 jogos. Outra equide ganhou $\frac{1}{4}$ menos. Quantos jogos foram ganhos pela segunda equipe?
4. Cinco rapazes formam uma equipe de "basket-ball". O pêso médio de cada um é de $118 \frac{3}{4}$ lb. Achar o pêso total da equipe.
5. Nove décimos de uma classe obteve promoção; 4 alunos não foram promovidos. Quantos alunos havia na classe? Quantos foram promovidos?

Os cinco problemas precedentes aparentam utilizar os interêsses infantís. Mera aparência! Quem, por exemplo, se é batido, se importa de tê-lo sido por 30 ou 40 por cento? Que importa o pêso total de uma equipe, quando é conhecido o seu pêso médio?

Examinemos os seguintes:

6. A tampa de uma caixa é feita de três pedaços de madeira. Os pedaços medem respectivamente, 4 polegadas e $\frac{5}{8}$, 3 pol. e $\frac{1}{4}$ e 6 pol. e $\frac{5}{8}$ de largura. Achar a largura da tampa.
7. Um campo de "base-ball" é retangular e mede 25.000 pés quadrados. O comprimento mede 41 jardas e $\frac{2}{3}$. Qual é a largura do campo?

Os dois precedentes *soam* à maneira de ocorrências da vida comercial e desportiva, mas *soam* apenas. Na realidade, nenhum apêlo fazem a interêsses atléticos ou construtivos.

E estoutro:

8. Um livro de leitura custa $0.50. Qual será o preço total dos livros necessários a uma classe que o use?

O tempo gasto só em contar os livros, seria bastante para a resolução de uma dúzia de bons problemas.

Os novos métodos exigem que os compêndios e os professores, no mínimo:

Levem em conta a vida da criança e as suas atividades, quer na escola, quer fora dela, e procuram utilizá-las, quando de real proveito.

Procurem, sendo possível, problemas vitais e atraentes para iniciação em cada novo processo.

Apliquem cada processo a assuntos dos quais se possa, razoàvelmente, esperar que a criança, no momento atual ou pouco mais tarde, tenha de aplicar, visto que tais aplicações são tão instrutivas, quanto as remotas e artificiais.

Usem jogos, competições, e outros recursos semelhantes, como meio de motivação e de treinamento, visto serem tão instrutivos quanto o mero exercício pelo próprio exercício.

Associem aos trabalhos de aritmética humorismo, sociabilidade, variedade, e ação, sempre que fôr possível sem prejuízo da ordem, do sistema e da boa execução da tarefa.

Presentes de Natal

PARA PAPAI

Um tinteiro

Uma linha de pescar

Uns suspensórios

PARA MAMÃE

Um açucareiro

Um bule

Um quadrinho

PARA UM MENINO

Um martelo

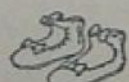
Um assobio

Uma bateria

Um canivete

PARA UMA MENINA

Um dominó

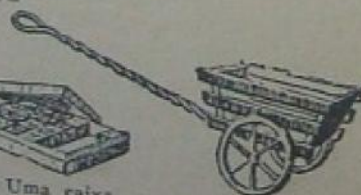
Uma fita

Uns sapatinhos de boneca

Bombons

PARA O BEBÊ

Uma corneta

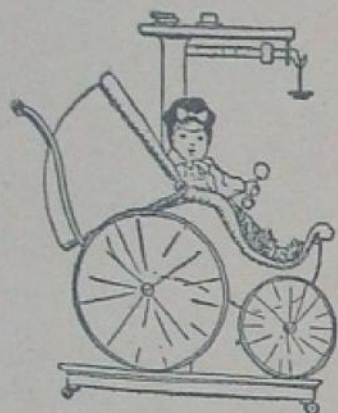
Uma bola de borracha

Uma caixa de cubinhos

Um carrinho

Veja se é capaz de descobrir sòzinho o modo de fazer as somas. (*) Se precisar de auxílio, estude a página 40. Repare como se pode achá-las depressa e sem êrro.

1. Escolha três presentes, um para o papai, um para a mamãe e um para o bebê. Escreva o preço de cada um e some para achar o custo total.
   Custo total quer dizer o preço dos três juntos.
2. Escolha três presentes para si mesmo. Procure o preço total.
3. Escolha três presentes para uma menina. Não gaste mais de 60 centavos. Qual é o custo total dos presentes que escolheu?
4. Escolha três presentes para um menino. Não gaste mais de 40 centavos. Qual é custo total do que escolheu?
5. Procure o custo total da compra de uma linha de pescar para papai, um açucareiro para a mamãe e um dominó para a irmãzinha.
6. Procure o preço total da compra de uns suspensórios para papai, um quadrinho para mamãe e uma caixinha de cubinhos para o bebê.
7. Qual é o preço total dos dois presentes mais baratos para menina?
8. Qual é o custo total dos três presentes mais caros para menina?
9. Qual é o custo total dos quatro presentes para menino?
10. Qual é o custo total dos quatro presentes para menina?
11. Qual é o custo total dos quatro presentes para bebê?

Ao professor: Alguns apenas dos alunos mais bem dotados serão capazes de descobrir por si mesmos a maneira de transportar as reservas, mas é bom que as crianças se defrontem com problemas como êstes e sintam a necessidade de solucionar o caso, antes de lhe ser ensinado o processo.

A pesagem de bebê

O bebê e o seu carrinho pesam juntos $38\frac{1}{8}$ lb. O carrinh sem o bebê pesa $14\frac{1}{2}$ lb.

Quanto pesa o bebêzinho?

$38\frac{1}{8}$ *Pense* "$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$, $1\frac{1}{8} = \frac{9}{8}$"

$14\frac{1}{2}$ *Pense* "$\frac{4}{8}$ e $\frac{5}{8} = \frac{9}{8}$"

$23\frac{5}{8}$ *Escreva* $\frac{5}{8}$. *Aumente 1 a 14.*

Tire a prova, somando 23 e $\frac{5}{8}$ a 14 e $\frac{1}{2}$.

A irmãzinha de Nell, pesava $7\frac{3}{8}$ lb., quando nasceu, e $9\frac{1}{4}$ lb., quando completou um mês. Quanto aumentou no primeir mês?

$9\frac{1}{4}$ *Pense* "$1\frac{1}{4} = \frac{10}{8}$."

$7\frac{3}{8}$ *Pense* "$\frac{3}{8}$ e ... $= \frac{10}{8}$."

Escreva $\frac{7}{8}$. *Aumente 1 ao 7.*

Tire a prova somando.

A tabela ao lado mostra o pêso de Maria, irmãzinha de Nell, tomado de dois em dois meses, do nascimento à idade de um ano.

Pêso de Maria Adams

Ao nascimento ..	**$7\frac{3}{8}$ lb.**
Aos 2 meses ...	**$11\frac{1}{4}$ lb.**
Aos 4 meses ...	**$14\frac{1}{8}$ lb.**
Aos 6 meses ...	**$15\frac{3}{4}$ lb.**
Aos 8 meses ...	**$17\frac{5}{8}$ lb.**
Aos 10 meses ...	**$19\frac{1}{2}$ lb.**
Aos 12 meses ...	**$21\frac{1}{2}$ lb.**

1. De quanto aumentou o pêso de Maria, nos primeiros dois meses?
2. De quanto aumentou nos dois meses seguintes?
3. Nos dois seguintes?

4. Nos dois seguintes?
5. Dos 8 aos 10 meses?
6. Nos dois últimos meses?
7. Do nascimento aos 6 meses?

Pêso de Alfredo Stern

O quadro ao lado mostra o pêso de Alfredo, irmãozinho de Alice Stern.

Aos 0 meses . . .	$7\frac{7}{8}$ lb.
Aos 2 meses . . .	$9\frac{3}{4}$ lb.
Aos 4 meses . . .	$11\frac{5}{8}$ lb.
Aos 6 meses . . .	$13\frac{1}{4}$ lb.
Aos 8 meses . . .	$16\frac{5}{8}$ lb.
Aos 10 meses . . .	$19\frac{1}{4}$ lb.
Aos 12 meses . . .	$23\frac{1}{8}$ lb.

A senhora Stern toma nota do aumento de pêso do seu bebê, de dois em dois meses, numa tabela semelhante à que está impressa à direita.

Aumento de 0 a 2 meses
Aumento de 2 a 4 meses
Aumento de 4 a 6 meses
Aumento de 6 a 8 meses
Aumento de 8 a 10 meses
Aumento de 10 a 12 meses

Uma Corrida de Frações

Os alunos do 5º ano fizeram uma "Corrida de Frações". O professor escreveu no quadro negro, 10 problemas, numa coluna semelhante à que está à esquerda desta página, e cobriu a coluna com um cartão. Depois, quando a descobriu, os meninos

e as meninas trataram de escrever os resultados, o mais depressa possível. O maior "record" registado foi de 39 segundos, obtido por uma menina. Pratique com os exercícios à direita da página. Experimente bater o "record". Só devem ser contados os trabalhos que apresentem todas as respostas certas e reduzidas à expressão mais simples.

Corrida de frações

Somar $8\frac{1}{8}$ + $3\frac{1}{2}$

Somar $2\frac{3}{4}$ + $3\frac{3}{4}$

Somar $2\frac{3}{4}$ + $3\frac{7}{12}$

Subt. 7 − $\frac{1}{2}$

Subt. $8\frac{1}{4}$ − $2\frac{7}{8}$

Material para a prática da

"Corrida de Frações"

Adição

A.	$5\frac{5}{16}$	$9\frac{1}{3}$	$9\frac{5}{8}$	$8\frac{3}{4}$	$7\frac{7}{12}$	$1\frac{2}{3}$
	$9\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{6}$	$9\frac{3}{4}$	$3\frac{2}{3}$	$8\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$
B.	$9\frac{3}{8}$	$2\frac{1}{6}$	$9\frac{7}{8}$	$9\frac{1}{2}$	$7\frac{3}{4}$	$5\frac{1}{4}$
	$8\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{12}$	$3\frac{1}{4}$	$5\frac{3}{16}$	$4\frac{5}{8}$	$4\frac{3}{4}$
C.	$9\frac{3}{8}$	$9\frac{3}{4}$	$8\frac{1}{3}$	$7\frac{7}{12}$	$9\frac{3}{8}$	$8\frac{2}{3}$
	$7\frac{7}{8}$	$4\frac{3}{4}$	$4\frac{2}{3}$	$9\frac{11}{12}$	$8\frac{5}{8}$	$8\frac{2}{3}$

Subtração

A.	8	7	5	6	9	4
	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$3\frac{5}{8}$	$3\frac{7}{12}$	$5\frac{9}{16}$	$1\frac{3}{4}$
B.	$9\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{3}$	$7\frac{3}{8}$	$21\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$	$8\frac{3}{4}$
	$4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{6}$	$5\frac{7}{8}$	$11\frac{4}{5}$	$1\frac{3}{4}$	$7\frac{11}{16}$

$\frac{5}{2} \times \frac{8}{10}$ 1. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ 3. $\frac{3}{8} \times \frac{3}{4}$ 4. $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}$

$17 \times \frac{1}{4}$ 5. $15 \times \frac{2}{3}$ 6. $15 \times \frac{3}{5}$ 7. $15 \times \frac{1}{2}$ 8. $5 \times \frac{3}{8}$

$\frac{1}{3} \times \frac{5}{8}$ 9. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ 10. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$ 11. $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}$ 12. $1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}$ 13. $2\frac{1}{2} \times 40$ 14. $3\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$ 15. $\frac{5}{8} \times 1\frac{1}{2}$ 16. $10\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

$1\frac{1}{2} \times 50$

Um brinquedo de "Bric-à-Brac"

Os alunos do 6º ano da escola Irving realizaram um brinquedo interessante. Cada aluno trouxe à escola um objeto usado para ser vendido em segunda mão. Sôbre cada objeto ou artigo trazido, colocaram um cartão com o preço de compra e outro com o preço de venda. Primeiro calcularam a quantos por cento do custo primitivo do objeto correspondia o preço de venda e escreveram no cartão. Dispuseram os objetos alinhados, ao redor da classe, a começar por aquele cujo preço de venda representava a mais baixa percentagem sôbre o custo originário e a terminar pelo de mais alta.

Deram, então, início ao jôgo.

Abaixo transcrevemos uma lista de objetos e os respectivos preços. Calcule para cada um a quantos por cento do custo do mesmo, quando novo, corresponde o preço atual.

	Preço do objeto em segunda mão	Custo em primeira mão
1. Livro	30 ¢	$1.75
2. Patins	25 ¢	.98
3. Jôgo	15 ¢	.49
4. Raquete	40 ¢	3.25
5. Quadro	17 ¢	.25
6. Brinquedo	9 ¢	.25
7. Boneca	15 ¢	1.25
8. Trenó	25 ¢	1.75

Fazer a divisão sòmente até milésimos, calculando as percentagens até décimos, como se vê abaixo, para o n.º 1.

```
0,30000 | 1,75          30,000 | 175
175       0,171   ou    17 5     0,171
----                    ----
1250      ou            12 50    ou
1225      17,1%         12 25    17,1%
----                    ----
 250                     250
 175                     175
 ---                     ---
  75                      75
```

Peçam ao seu professor que os deixe brincar de "bric-à-brac", logo que houverem aprendido a achar percentagens ràpidamente e sem erros.

TEMAS PARA DISCUSSÃO

1. Substituir cada um dos problemas seguintes por outro que se preste ao mesmo treino de aritmética, porém, mais interessante ou desembaraçado de dificuldades inúteis de linguagem ou atendendo a ambas as cousas ao mesmo tempo.
   a. Se um negociante comprar três barricas de açúcar, pesando respectivamente 310,7 lb., 314,6 lb. e 312,5 lb., quantas libras comprará ao todo?
   b. Se a altura do ponto mais elevado do mostrador de um relógio de sol é de $\frac{5}{32}$ de diâmetro do mostrador e êste mede 12 polegadas, qual será a altura do relógio?

c. Que distância percorrerá em 8 dias, um caixeiro viajante que faz a média $52 \frac{1}{2}$ milhas por dia?

d. Meça a capa de sua aritmética e faça um desenho da mesma na escala de $\frac{1}{4}$.

e. Os automóveis pagam uma taxa para construção de estradas. Em certo lugar, em um ano, havia 2.900.000 veículos movidos a motor, os quais pagavam, em média, $10 por ano, para registo e licença. Quanto recebia o Estado?

f. A superfície da Índia Inglesa é de 1.004.616 milhas quadradas e a sua população de 150.767.851 habitantes. Quantos habitantes por milha quadrada?

g. Quantas pessoas morrem, por ano, numa cidade de ... 190.000 habitantes, se a média anual de mortes nessa cidade é de 10 por mil?

h. Se um homem vence em média $2 \frac{3}{4}$ pés por passo, quantos passos deve dar para percorrer uma milha (5.280 pés)?

i. Um procurador cobrou uma dívida de $324.50 e pediu 10 % por seus serviços. Qual foi a sua comissão?

j. Supõe-se que as pirâmides do Egito foram construídas 337 anos antes da fundação de Cartago; que Cartago fôra fundada 49 anos antes da destruição de Tróia e Tróia destruída 431 anos antes da fundação de Roma; Cartago foi destruída 607 anos depois da fundação de Roma e 146 anos antes da éra cristã. Quantos anos antes da éra cristã foram construídas as pirâmides do Egito?

2. Que meios se podem utilisar para infundir interêsse:
   a. Ao aprendizado de somas e subtrações com 0? (Livro I, pgs. 26-29.)
   b. Às revisões da multiplicação por número simples, da subtração, do conhecimento das tabelas de medidas e das divisões breves? (Livro I, pgs. 136-137.)

   c. Ao aprendizado da significação de ações? (Livro III, pgs. 153-154.)
   d. Ao estudo das medidas circulares? (Livro III, pgs. 111, 112, 113.)
3. Examinar a pág. 214, Livro I, referências à escrita de frações, tamanho, modo de espaçá-las e motivos usados para despertar o interêsse em alcançar resultados.
4. Examinar Livro III, pág. 31: Conviriam êsses exercícios ao 3º e ao 4º ano?
5. Examinar pág. 130 e 131: Foi Alice uma aluna superior ou medíocre? Suponhamos que um professor aplicará, muitas vezes, em sua classe do 5º ano, a forma do teste indicado, para provocar reações rápidas, facilidade de adaptação, conhecimento de princípios fundamentais e combinações de vários passos em um. Como se arranjará êle para atender às diferenças individuais, evitando que os alunos destros, adaptáveis, bem dotados, não se enfadem e os tardos e rudes não desanimem?
6. Ver Livro III, pág. 6. Qual seria o resultado se as instruções fôssem:
   "Pratique até conseguir resolver tudo, em 4 minutos, sem êrro"?
   Nos exercícios realizados com a finalidade de alcançar determinado "standard" de velocidade e exatidão, é preciso ter o máximo cuidado em marcar tempo razoável, relativo à idade mental do aluno.

CAPITULO III

TEORIA E EXPLICAÇÕES

RACIOCÍNIO DEDUTIVO

Os velhos métodos explicavam as várias regras e processos da aritmética, desde o "transporte de reservas" na soma até a colocação da vírgula na divisão de decimais, se é que os explicavam, dedutivamente, como conseqüência necessária de axiomas fundamentais e da natureza de nosso sistema de numeração, em que, por exemplo, cada dígito representa tantas unidades, dezenas, centenas, décimos, etc., segundo o lugar que ocupa; em que, na fração ordinária, o número escrito acima do traço representa o número de partes tomadas e o número escrito abaixo do traço, a razão entre a unidade e o tamanho dessas partes.

A experiência, entretanto, veiu mostrar que o aproveitamento dos alunos, através das lições dedutivas, não correspondia ao esfôrço e ao tempo gasto em ensiná-las, de modo que, ano a ano, foi decaindo o seu prestigio. Hoje, nenhum autor competente, nenhum téchnico, daria explicações semelhantes às que apresentamos abaixo, as quais eram altamente consideradas ao tempo de nossos pais.

I

Dividir, igualmente, entre 15 homens 3465 dólares.

Solução: Quando o divisor excede de 12, como no exemplo dado, em vez de fazer todas as operações mentalmente, tor-

na-se necessário fazer parte da operação por escripto, como no exemplo 3, que precede.

15 não está contido em 3 (milhares); logo, não haverá milhares no quociente. Separa-se mais um algarismo à direita; fica 34 (centenas), como primeiro dividendo parcial. 15 está contido neste dividendo 2 (centenas) vezes, o que dá 2 centenas de dólares a cada um dos homens, e aos 15, 15×2 (centenas) ou 30 centenas. Subtraindo 30 centenas das 34 centenas do dividendo, restam, 4 centenas as quais se juntam às 6 dezenas do dividendo, abaixando o 6, e ficam 46 dezenas, que formam o segundo dividendo parcial. Neste, 15 está contido 3 (dezenas) vezes, o que dá a cada homem mais 3 dezenas de dólares (30 dólares), e aos 15, 15×3 (dezenas) ou 45 dezenas de dólares. Subtraindo estas das 46 dezenas e baixando as 5 unidades do dividendo, temos 15 (unidades) como terceiro dividendo parcial, no qual o divisor 15 está contido uma vez, o que dá 1 (unidade) dólar a cada homem. Donde se conclue que cada homem pode receber 2 centenas, 3 dezenas e 1 unidade isto é, 231 dólares.

```
milhares centenas dezenas unidades        centenas dezenas unidades
   3        4        6       5      15       2       3       1
   3        0   centenas
   ——
            4        6   dezenas
            4        5
            ——
                     1       5   unidades
                     1       5
                     ——
```

Por êste processo, o dividendo é separado em partes, cada uma das quais contém o divisor um certo número de vezes.

Divid. parciais	Divisor	Quocientes
3000	15	200
450		30
15		1
3465		231

Na primeira parte, 30 (centenas) o divisor está contido 2 (centenas) vezes. Na segunda, 45 (dezenas), o divisor está contido 3 (dezenas) vezes e na terceira, 15 (unidades), está contido uma (unidade) vez. Assim se vê fàcilmente que as diversas partes juntas são iguais ao dividendo dado e que os diversos quocientes parciais juntos formam o quociente total.

II

Divisão de fração por fração

Quantas libras de chá se podem comprar por $\frac{11}{12}$ de dólar, custando a libra $\frac{2}{3}$ de dólar?

CÁLCULOS

Primeiro passo. $$\frac{11}{12} \times 3 = \frac{33}{12}$$

Segundo passo. $$\frac{33}{12} \div 2 = \frac{33}{24} = 1\frac{3}{8}$$

Cálc. completo. $$\frac{11}{12} \div \frac{2}{3} = \frac{11}{\cancel{12}_{4}} \times \frac{\cancel{3}}{2} = \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$$

Análise. Custando uma libra de chá $\frac{2}{3}$ de dólar, com $\frac{11}{12}$ de dólar se poderão comprar tantas libras, quantas vezes $\frac{2}{3}$ estiver contido em $\frac{11}{12}$. 1 está contido em $\frac{11}{12}$, $\frac{11}{12}$ de vezes, e $\frac{1}{3}$ está contido em $\frac{11}{12}$, 3 vezes mais ou 3 vezes $\frac{11}{12}$, que são $\frac{33}{12}$ de vezes, que é o número de libras de chá que se podem comprar a $\frac{1}{3}$ de dólar a libra; porém, o preço da libra não é de $\frac{1}{3}$ de dólar, mas de $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{3}$ não estão contidos em $\frac{33}{12}$, senão $\frac{1}{2}$ do número de vezes que um $\frac{1}{3}$ está contido em $\frac{33}{12}$. Assim, di-

vidindo $\frac{33}{12}$ por 2, obtém $\frac{33}{24}$ que é igual a $1\frac{3}{8}$ de vezes ou ao número de libras que se podem comprar a $\frac{2}{3}$ de dólar a libra.

Vemos, no cálculo efetuado, que multiplicamos o dividendo pelo denominador do divisor e dividimos o resultado pelo numerador do divisor, o que está de acôrdo com a regra da divisão de frações. Portanto, invertendo os termos da fração divisor, as duas frações ficam em tal reciprocidade de relações, que se podem multiplicar os dois números superiores para achar o numerador do quociente e os dois números inferiores para achar o denominador do mesmo, como se mostra no cálculo acima.

III

Divisão de frações é o processo de divisão, em que o divisor ou o dividendo ou ambos são frações.

Divisão de fração por inteiro

Ex. 1. Dividir $\frac{8}{9}$ por 4. R.: $\frac{2}{9}$

1.° CÁLCULO

$$\frac{8}{9} \div 4 = \frac{2}{9}$$

Divide-se o numerador da fração pelo inteiro, 4, e escreve-se o quociente, 2, sôbre o denominador. E' evidente que a fração fica dividida por 4, visto que o tamanho das partes, que é representado pelo denominador, continua o mesmo, enquanto o número de partes é apenas igual a $\frac{1}{4}$ do número primitivo, logo

Dividindo o numerador de uma fração por um número qualquer, a fração toda fica dividida por êsse número.

Ex. 2. Dividir $\frac{5}{7}$ por 9. R.: $\frac{5}{63}$

2.° CALCULO

$$\frac{5}{7} \div 9 = \frac{5}{63}$$

Multiplica-se o denominador da fração pelo inteiro, 9, e escreve-se o produto sob o numerador, 5. E' evidente que êste processo divide a fração, porque, multiplicando o denominador por 9, o número de partes em que estava dividida a unidade, aumenta, tornando-se cada parte 9 vezes menor, isto é, reduzindo-se a $\frac{1}{9}$ do seu valor primitivo. Ora, se cada parte não vale senão $\frac{1}{9}$ das anteriores e o número de partes não aumentou, está provado que a fração toda ficou dividida por 9 logo:

Multiplicando o denominador de uma fração por qualquer número, a fração toda fica dividida por êsse número.

REGRA: Para dividir uma fração ordinária por um número inteiro, *divide-se o numerador pelo inteiro, se a divisão não deixar resto, e conserva-se o mesmo denominador,* ou

Multiplica-se o denominador da fração pelo inteiro e conserva-se o mesmo numerador.

Divisão de inteiro por fração

Ex. 1.° Quantas vezes 13 conterá $\frac{3}{7}$? R.: $30\frac{1}{3}$

CALCULO

$$13 \div \frac{3}{7} = \frac{13 \times 7}{3} = \frac{91}{3} = 30\frac{1}{3}$$

13 conterá $\frac{1}{7}$ tantas vezes, quantas vezes houver *sétimos* em 13. 1 inteiro contém 7 vezes $\frac{1}{7}$; logo, 13 inteiros conteem

91 vezes 1 sétimo, ou sejam $\frac{91}{7}$. Ora, se 13 contém 91 vezes 1 sétimo, 13 conterá tantas vezes $\frac{3}{7}$, quantas 91 contiver 3 ou sejam $30\frac{1}{3}$. Donde se conclue que, para se dividir um inteiro por uma fração,

REGRA: *Multiplica-se o inteiro pelo denominador e divide-se o produto pelo numerador.*

Divisão de um número mixto por inteiro

Ex. 1. Dividir $17\frac{3}{8}$ por 6. R.: $2\frac{43}{48}$

CALCULO

$$17\frac{3}{8} \div 6$$

$$17 \div 6 = 2$$

$$5\frac{3}{8} = \frac{43}{8}$$

$$\frac{43}{8} \div 6 = \frac{43}{8 \times 6} = \frac{43}{48}$$

$$2 + \frac{43}{48} = 2\frac{43}{48}$$

Dividindo-se a parte não fracionária pelo inteiro, 6, obtém-se 2 inteiros e um resto igual a $5\frac{3}{8}$, o qual se reduz à fração imprópria e se divide pelo divisor, 6, como no primeiro caso.

Juntando êste resultado ao quociente 2, obtém-se o resultado $2\frac{43}{48}$; logo, para dividir um número mixto por 1 inteiro, divide-se a parte não fracionária pelo inteiro e, sendo necessário, reduz-se o resto à fração imprópria e se procede, como no primeiro caso.

Divisão de inteiro por número mixto

Ex. 1. Dividir 25 por $4\frac{3}{5}$ R.: $5\frac{10}{23}$

CALCULO

$$25 \div 4\frac{3}{5} = \frac{125}{5} \div \frac{23}{5}$$

$$125 \div 23 = 5\frac{10}{23}$$

Reduzem-se o dividendo e o divisor a quintos, e efetua-se a divisão como se fôssem inteiros.

Para reduzir o dividendo e o divisor a quintos, multiplicam-se ambos por 5, o que não altera o quociente, porque, quando se multiplicam o dividendo e o divisor pelo mesmo número, o quociente não se altera.

Ficam assim $\frac{125}{5}$ por $\frac{23}{5}$ que se dividem como se fôssem inteiros, porque, aplicando a regra da divisão de fração por fração, tem-se $\frac{125}{5} \times \frac{5}{23}$, donde, por cancelamento, $\frac{125}{23}$ ou $125 \div 23$. Logo, para dividir um inteiro por um número mixto, reduzem-se o dividendo e o divisor ao denominador da parte fracionária do divisor e efetua-se a divisão, como se fôssem inteiros.

Divisão de fração por fração

Ex. 1. Dividir $\frac{7}{8}$ por $\frac{4}{9}$ R.: $1\frac{31}{32}$

1.° CALCULO

$$\frac{7}{8} \times 9 = \frac{63}{8}; \quad \frac{63}{8 \times 4} = \frac{63}{32} = 1\frac{31}{32}$$

2.° CALCULO

$$\frac{7}{8} \div \frac{4}{9} = \frac{7}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{63}{32} = 1\frac{31}{32}$$

Se 1 está contido em $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{8}$ de vezes, $\frac{1}{9}$ está contido em

cadeia de argumentos, a axiomas e à natureza geral de nosso

$\frac{7}{8}$, 9 vezes $\frac{7}{8}$ de vezes ou $\frac{63}{8}$ de vezes, e $\frac{4}{9}$ está contido em $\frac{7}{8}$,

$\frac{1}{4}$ de $\frac{63}{8}$ de vezes, que são $\frac{63}{32}$ ou $1\frac{31}{32}$ de vezes.

Assim, multiplica-se o denominador do dividendo pelo numerador do divisor, e o numerador do dividendo pelo denominador do divisor. Portanto, por conveniência, pode-se simplesmente inverter os termos do divisor, como se vê no 2.° cálculo, e proceder como na multiplicação de fração por fração.

O fato de terem sido estas explicações dedutivas reduzidas em extensão e importncia, levou alguns professores a imaginarem que toda explicação de regras e de processos deveria ser banida do ensino e que o aluno devia aprender mecânicamente. Os novos métodos apontam um terceiro caminho a seguir. Afirmam que, a-pesar-das explicações dedutivas, tais como eram usadas, não levarem à compreensão racional das regras e dos processos, tal compreensão é indispensável e possível, isto é, que é preciso não abandonar o aluno a uma memorização cega e automática do que tem de fazer. Os novos métodos teem por objetivo fazer da aritmética uma ciência que os alunos conheçam tão bem como um ofício em que saibam trabalhar dextramente; visam assegurar um entendimento real das regras e dos princípios. Os meios pelos quais conseguem atingir os fins colimados é o tema do tópico seguinte.

RACIOCÍNIO INDUTIVO

Há duas espécies de razões que podem ser dadas como resposta a questões como estas: "Por que se devem transportar as reservas na adição?" "Por que se deve escrever o primeiro dígito de cada produto parcial sob o algarismo pelo qual se está multiplicando?" ou "Por que, tendo-se de dividir por $\frac{3}{4}$, multiplica-se por $\frac{4}{3}$?" A primeira espécie reporta-se, por um sistema aritmético, e constitue uma explicação dedutiva ou raciocínio dedutivo, como os descritos acima. A segunda é muito diferente e consiste, em essência, no raciocínio seguinte: "Isto está certo, porque sempre que faço assim, dá uma resposta

exata". Deriva de algumas verificações valiosas. E' experimental e indutiva.

Os métodos fazem largo uso da segunda espécie de raciocínio. O aluno aprende a verificar regras e procressos. Verifica por si mesmo que se multiplica 412 por 3, somando

$$\begin{array}{r} 412 \\ 412 \\ 412 \\ \hline \end{array}$$

Verifica se está certo o que lhe ensinaram sôbre a divisão de 675 por 25, multiplicando 27 por 25. Comprova a regra de somar frações, objetivamente. Comprova a regra que ensina que o número de casas de dízima do produto é igual à soma das casas de dízimas do multiplicando e do multiplicador, comparando os resultados obtidos com os que obtém pela multiplicação dos mesmos números expressos em frações ordinárias, substituindo $0{,}25 \times 0{,}5$ por $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$. Verifica o resultado da multiplicação $\begin{array}{r} 7{,}14 \\ \times\, 3{,}8 \\ \hline \end{array}$, pensando assim: o produto de 7,14 por 3,8 não pode ser 2,7132, porque 3×7 é mais do que 20. Não pode ser 271,32, porque 4×8 não chega a 200.

Os novos métodos dão maior importância à convicção do aluno quanto à exatidão da regra e do processo do que à habilidade de exibir em palavras uma prova que possa satisfazer ao matemático mais exigente. Não admitem que o aluno ponha fé absoluta nas regras e nos processos e os siga como um autômato. Por outro lado, também não insistem em que o aluno seja capaz de formular deduções da teoria dos números, em forma exata e perfeita. Julgam que, exigindo-se do aluno que o faça, expõe-se êle à tentação de simplesmente memorizar definições, regras, análises e explicações.

Por exemplo, suponhamos que uma criança haja efetuado a divisão de 6 por $\frac{3}{4}$, multiplicando 6 por $\frac{4}{3}$ e haja comprovado

o resultado objetivamente, dividindo uma tira de papel em partes de $\frac{4}{3}$ de pol. de comprimento; que haja dividido $2\frac{1}{2}$ por $\frac{5}{8}$, multiplicando $2\frac{1}{2}$ por $\frac{8}{5}$ e haja comprovado o resultado, dividindo uma tira de $2\frac{1}{2}$ pol. em partes de $\frac{5}{8}$ de pol.; e do mesmo modo, em outros casos. Suponhamos que haja organizado também por si mesmo, experimentalmente, por adição ou multiplicação, tabelas como

$$1\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} = 2$$

$$2\frac{1}{2} \div \frac{5}{6} = 3$$

$$3\frac{1}{3} \div \frac{5}{6} = 4$$

$$4\frac{1}{6} \div \frac{5}{6} = 5$$

e as tenha usado para verificar a exatidão da regra. Tal criança deve haver entendido de modo verdadeiro e útil as razões de "Inverter e multiplicar" ou "Multiplicar pela recíproca" (supondo que lhe hajam ensinado a significação de *recíproca*). Todavia pode não ser capaz de expor a prova dedutiva, derivando-a da natureza das frações. Talvez, mesmo tão pouco nossos leitores o sejam!

ADAPTABILIDADE AO APRENDIZ

Os novos métodos pouco se preocupam com explanações eruditas e enunciados de regras próprias para figurar numa enciclopédia destinada a matemáticos; visam, principalmente tor-

ná-los guias verdadeiros e seguros para o jovem aprendiz. Empenham-se em fornecer ao aluno verdades dinâmicas e conceitos tão exatos que desapareça toda probabilidade de desorientação e uma correção verbal e lógica própria de um dicionário. Por exemplo, para principiantes do 5.º ano, os novos métodos preferem A a B:

A

Números como 2, 5, 7, 9, 11, 25, 75, 250 são inteiros.

Números como $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{7}{6}$, são frações.

Números como $4\frac{1}{4}$, $2\frac{7}{8}$, $12\frac{3}{4}$, $1\frac{2}{3}$ são números mixtos.

B

Todo número expresso sem fração chama-se inteiro. Todo número que indica partes iguais da unidade, chama-se fração. Toda fração que tem ambos os termos expressos, chama-se fração ordinária. Todo número composto de um inteiro e uma fração chama-se número mixto.

Dinâmicamente — isto é, em *ação* — uma definição se considera correta, se conduz a aplicações corretas; uma regra é correta, se leva a operações corretas, um processo foi corretamente entendido, se o aluno pode aplicá-lo para obter resultados corretos, — e, nos três casos, se, as definições, as regras e explicações *não constituírem tropêço ao aluno em trabalhos ulteriores*. Assim, nenhum prejuízo advém ao aluno de pensar em $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, etc. primeiro como "números inferiores a 1" e, um pouquinho mais tarde, em frações, como "números semelhantes a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$", sem nenhuma referência à denominação *fração imprópria*. Se o aluno usar tal conhecimento para efetuar somas e subtrações de frações com o mesmo denominador ou de meios, quartos e oitavos ou de meios, terços e sextos, de modo algum se desorientará ou se prejudicará para o futuro, quando a idéia e a definição de fração tornar-se mais extensa e precisa. De fato não se pode esperar que um aluno de escola elementar chegue a entender uma definição perfeita de fração, que incluiria

$$\frac{b+a}{c},\ \frac{\frac{b+a}{7}}{8\frac{3}{4}},\ \text{e}\ \frac{0{,}426-0{,}169}{2{,}3}$$

DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO DA TEORIA

Era comum, nos velhos métodos dar-se a teoria geral, regra ou explicação de certos processos, como os da soma e da subtração de frações ordinárias, ou da divisão de decimais, e depois se exigirem do aluno copiosos exercícios, até torná-lo capaz de usar tais processos correta e ràpidamente. Supunha-se que a compreensão, na maioria dos casos, devia preceder o uso e que depois de estar o aluno apto a aplicar bem o processo, não havia mal em que esquecesse as razões do mesmo. "Primeiro aprender, porque se faz dêste ou daquele modo; depois, esquecer os porquês".

Tal plano é talvez defensável. Mas os novos métodos desconfiam dêste aprender para esquecer, e, em particular, julgam que os princípios gerais devem ser as últimas cousas a serem esquecidas. Se os princípios ensinados forem realmente úteis, se atuaram, realmente, no aprendizado e na fixação do aprendido, se forem bem ensinados, parece que, embora certas minúcias de cálculos venham a ser esquecidas, êsses princípios vitais e gerais não o serão.

Os novos métodos ensinam cada princípio, gradativamente, à medida que se vai praticando o respectivo processo "e muitas vezes *depois*", como meio de explicá-lo e justificá-lo. E', então, mais bem compreendido e mais fàcilmente evocado, porque se

relaciona com aquilo que o aluno está fazendo e com o que esteve fazendo. Assim, o aluno começa o seu trabalho de adição de frações dissemelhantes, por exercícios, como os seguintes:

6	7
$9\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{2}$
$4\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$

em que aprende simplesmente que "$\frac{1}{2}$ são $\frac{2}{4}$". Mais tarde, encontrará somas de $\frac{-}{8}$, $\frac{-}{4}$ e $\frac{-}{2}$, e aprenderá ainda simplesmente que "$\frac{1}{2}$ são $\frac{4}{8}$" e "$\frac{1}{4}$ são $\frac{2}{8}$ e $\frac{3}{4}$ são $\frac{6}{8}$". Ficará, assim, preparado para entender o princípio geral "quando se somam frações, reduzem-se ao mesmo denominador".

Os novos métodos reúnem os conhecimentos mais simples em um conhecimento mais geral e, depois de haver o aluno adquirido experiência em certas operações, dão-lhe uma explicação completa, que já está apto para entender de todo, e cujo valor, pode então apreciar; mas que lhe seria incompreensível e inútil, ensinada logo de começo. Neste caso estão as páginas seguintes "65 — 69", que oferecem trabalhos próprios para o fim do 6.º ano e início do 7.º.

Os novos métodos teem mais confiança no ensino que leva o aluno a aprender mediante sua própria experiência do que naquele que se baseia em afirmações dogmáticas de mestres e compêndios. Afirmar traz o perigo de conduzir a simples memorização verbal de definições, regras e explicações, salvo se a definição ou a regra ou a explicação vem juntar-se, convenientemente, a algum fato que já tenha sido observado pelo aluno, através de trabalho efetivo, e de cuja veracidade esteja convencido.

Assim, em vez de falar muito ao aluno sôbre o valor rela-

tivo dos números, devem-se-lhe dar, de quando em quando, exercícios semelhantes aos que seguem:

6×9 =	7×8 =
6×90 =	7×80 =
6×900=	7×800=
243	Tire a prova assim:
2	2×200=
——	2×40 =
	2×3 =
	Total ——
975	Tire a prova assim:
8	8×5 =
——	8×70 =
	8×900=
	Total ——

REVISÃO ORAL

Fazer uma adição significa achar a soma de duas quantidades.

O resultado exato da soma é o resultado que se obteria, contando ou medindo com a máxima precisão.

Obtém-se um resultado exato na soma de inteiros ou de decimais,

Somando unidades a unidades e contando 10 unidades como 1 dezena,

Somando dezenas a dezenas e contando 10 dezenas como 1 centena,

Somando centésimos a centésimos e contando 10 centésimos como 1 décimo,

Somando milésimos a milésimos e contando 10 milésimos como 1 centésimo.

1. Como se contam 10 décimos na soma?

Obtém-se um resultado exato na adição de frações que teem o mesmo denominador, somando os numeradores.

2. Como se contam $\frac{2}{2}$ ou $\frac{3}{3}$ ou $\frac{4}{4}$ ou $\frac{5}{5}$ ou $\frac{8}{8}$?

Obtém-se um resultado exato na adição de frações de denominadores diferentes, reduzindo-as primeiro ao mesmo denominador ou convertendo-as em decimais.

3. Converter $\frac{7}{25}$, $\frac{9}{50}$ e $\frac{11}{20}$ em decimais.

4. Reduzir $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{6}$ a $\frac{}{12}$.

5. Leia, substituindo o ponto pela palavra ou número conveniente:

Quando se somam quantidades como 4 bu. 2 pk. 3 qt. e 1 bu. 3 pk. e 7 qt., obtém-se o resultado exato, somando qt. a.... e contando 8 qt. como.... pk. e somando pk. a.... e contando 4 pk. como.... bu.

6. Dizer o que se transporta, quando se fazem cálculos com segundos, minutos, onças, pés, polegadas.

7. Use a letra b. para abreviar bushels, p. para pecks, q. para quarts.

O pai de Helena comprou 3 sacos de nozes.
O 1.º continha 2b. 1p. 3q.
O 2.º " 1b. 1p. 2q.
O 3.º " 2b. 1p. 2q.
Quanto continham os três juntos?

UNIDADES DE MEDIDA

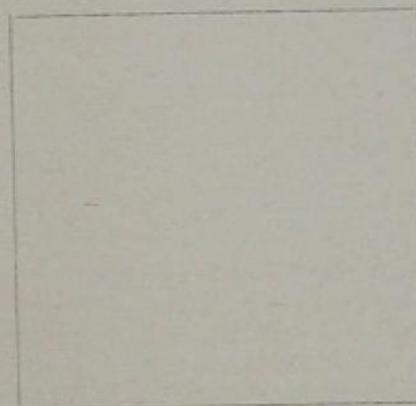
Toda quantidade com que se comparam outras da mesma espécie para medir ou contar chama-se unidade de medida.

1. Ler substituindo o traço pela palavra que falta, como se vê nas duas primeiras linhas.

a. Meia milha vale $\frac{1}{2}$, quando se toma a milha como unidade de comprimento.

b. Meia milha vale 160, quando se toma o *rod* como unidade de comprimento.

c. Meia milha vale 880, quando se toma....como unidade de comprimento.

d. Meia milha vale 2640, quando se toma...como unidade de comprimento.

e. O quadrado, acima, será igual a 2×2, se tomarmos....como unidade de comprimento.

f. O quadrado será igual a $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$, se tomarmos...como unidade de comprimento.

g. Uma hora valerá 1, se tomarmos a....como unidade de tempo.

h. Uma hora valerá $\frac{1}{24}$, se tomarmos o....como unidade de tempo.

i. Uma hora valerá 60, se tomarmos o....como unidade de tempo.

Toda quantidade expressa um número maior ou menor de unidades de certa espécie.

Assim 9 milhas é igual a 9×1 milha; $10\frac{1}{2}$ milhas é igual

a $10\frac{1}{2} \times 1$ milha; $3\frac{3}{4}$ lb. é igual a $3\frac{3}{4} \times 1$ lb.

Para avaliar a área de uma superfície qualquer pelas suas dimensões, deve-se primeiro reduzí-las à mesma unidade, escolhendo uma unidade conveniente.

2. Substituir o traço pela palavra que falta:

a. Comprimento de um retângulo em.... × ....= área em pol. quadradas.

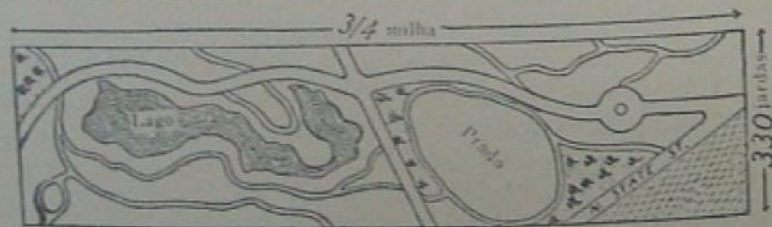
b. Comprimento de retângulo em.... × ....= área em pés quadrados.

c. Comprimento de um retângulo em jardas × ....= área em.....

d. Base de um paralelogramo em polegadas × alt. em = área em.....

e. Base de um paralelogramo em milhas × alt. em....= área em.....

f. Base de um triângulo em pés $\times \frac{1}{2}$ de....=.... em pés quadr.

g. A média dos dois lados paralelos de um trapézio × a altura = área. Se as dimensões forem dadas em polegadas, a área será em..... Se as dimensões forem dadas em pés, a área será em..... Se as dimensões forem dadas em milhas, a área será em.....

(Com lapis)

3. Quantos pés quadrados há em uma estrada perfeitamente reta de 2mi,4 de comprimento e 18 pés de largura?

4. Quantas jardas de pano há numa grande bandeira de 5 jardas de comprimento por 10 pés de largura?

5. A que fração de milha quadrada é igual a área do parque abaixo?

Para achar a capacidade de uma caixa, caixão ou outro sólido qualquer, pelas respectivas dimensões, devem-se reduzí-las, primeiro, à mesma unidade de medida.

6. De quantos pés cúbicos será a capacidade de uma celha retangular de 10 pés de comprimento, 6 pol. de largura e 18 pol. de altura?

7. Uma pilha de lenha de 4×4×8 pés é eqüivalente a 1 cord de 4 pés de lenha. Quantos cords de lenha de 4 pés haverá em um volume de 4 pés de largura, 4 pés de alt. e 24 jardas de compr.?

8. Quantas jardas cúbicas de terra serão retiradas na escavação de um fôsso de 40 pés por 24 pés por 8 pés?

Ao resolver qualquer problema, deve-se pensar no que significam as unidades de medida.

9. O Expresso de Mercadores percorre 220 milhas em 4 horas e 24 m. O Continental corre à velocidade de 1 milha por 80 segundos. Qual dos dois corre mais? Provar que a resposta dada está certa.

10. Helena pode somar 100 números de dois algarismos, em 248 segundos. Alice pode somar os mesmos a uma velocidade de 30 por minuto. Qual das duas soma com maior rapidez? Provar que a resposta dada está certa.

REGRAS E EXPLICAÇÕES CIENTIFICAS VERSUS REGRAS E EXPLICAÇÕES CONVENCIONAIS

Os novos métodos distinguem entre as regras e explicações que exprimem verdades necessárias, por serem inerentes à própria natureza do nosso sistema de numeração, e as regras simplesmente cômodas, ou mesmo, meramente, usuais. Entre as primeiras, temos por exemplo:

Subtraendo + resto = minuendo.
Divisor × quociente = dividendo.
"Por cento de" significa "vezes centésimos".
"Quantos por cento" significa "Quantos centésimos de".
Casas de dízima do divisor mais casas de dízima do quociente = casas de dízima do dividendo.

Regras como as precedentes são necessàriamente verdadei-

ras e universais. Dentre as últimas, podemos citar as regras relativas:

à ordem a obedecer na soma: primeiro as unidades, depois as dezenas, etc.;

ao transporte das reservas na adição;

à colocação dos produtos parciais;

à necessidade de reduzir as frações ao mesmo denominador, para somá-las.

Não é verdade que se deva começar pela coluna das unidades e transportar as reservas para obter um resultado exato. O processo seguinte

$$\begin{array}{r} 88 \\ 56 \\ 97 \\ \hline 220 \\ 21 \\ \hline 241 \end{array}$$

é perfeitamente aceitável e exato. Simplesmente, não é usado, provàvelmente por ser menos rápido.

Podemos achar o produto de $\begin{array}{r} 475 \\ 261 \\ \hline \end{array}$ não sòmente pelo processo:

$$\begin{array}{r} 475 \\ 261 \\ \hline 475 \\ 2850 \\ 950 \\ \hline \end{array}$$

, mas de muitas outras maneiras.

Por exemplo, assim

$$\begin{array}{r} 80000 \\ 24000 \\ 14000 \\ 4200 \\ 1000 \\ 400 \\ 300 \\ 70 \\ 5 \\ \hline 123975 \end{array}$$

e achar um resultado tão exato, quanto pelo primeiro.

Não é indispensável reduzir $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{4}$ para somar $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$.
A maior parte de nossos leitores, cremos, não faria a redução, se tivessem de efetuar tal operação. Sem dúvida procuraria logo, o total.

Se todos soubéssemos as combinações de subtração de $\frac{\ }{2}$, $\frac{\ }{4}$ e $\frac{\ }{8}$, como sabemos as de inteiros até 18 — 9, poderíamos efetuar todos os exercícios abaixo, sem reduzir os meios e os quartos a oitavos.

$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

Temos tanta necessidade da regra da redução de frações ao mesmo denominador, como da seguinte "Ao somar números de 1 a 10, conte nos dedos". Dessas regras uma é boa e outra má, não porque uma seja verdadeira e a outra falsa, mas porque, de modo geral, é preferível seguir uma a outra.

Algumas regras da segunda espécie, a que se costumava dar no ensino a mesma importância que se atribue às regras essenciais e necessárias, na realidade, nem mesmo convém seguir. Costumava-se ensinar à criança que para multiplicar frações ordinárias e reduzí-las à expressão mais simples, devia-se procurar o máximo comum divisor e por êle dividir ambos os termos da fração. Hoje, quem ensinará isto? Costumava-se ensinar a somar frações, reduzindo-as sempre ao menor múltiplo comum. Hoje, permite-se que as reduzam a qualquer denominador, isto é, àquele que conduza mais ràpidamente à solução. Algumas vezes, ainda se advertem as crianças de que deixar de simplificar o resultado final, até a expressão mais simples, eqüivale a dar uma resposta errada. Que contrassenso exigir que

os alunos raciocinem, quando os próprios mestres revelam tamanha irreflexão!

De modo geral, os novos métodos, substituindo por provas experimentais as longas e incompreensíveis explicações e derivações dedutivas; dando as razões aos alunos, no momento oportuno e em forma utilizável; organizando de tal modo o estudo, que o próprio trabalho do aluno lhe revele a ciência e a lógica aritméticas, e, distinguindo os princípios essenciais de regras arbitrárias, criadas por simples conveniência, repuseram o raciocínio no lugar que lhe cabe no aprendizado da aritmética.

TEMAS PARA DISCUSSÃO

1. Comparar as explicações relativas às divisões longas (*) com as explicações das páginas 52 — 58, e à da divisão por fração (Livro II, págs. 52 e 53) ver, também, as verificações às págs. 54 e 55.

2. Um menino perguntou ao professor por que devia transportar as reservas na soma e o professor respondeu: "Porque o valor dos algarismos aumenta da direita para a esquerda numa razão decimal". Qual o defeito de semelhante explicação?

3. Que crítica se poderia fazer a um professor que usasse no 7.º ano, no ensino das fórmulas para o cálculo das áreas de triângulos e de paralelogramos, exatamente a mesma explicação dada no 6.º ano?

4. Quais das regras abaixo são parte importante da ciência aritmética? Quais não o são?

a. Escrevem-se os números em linha horizontal e traça-se à direita uma linha vertical, para separar os divisores dos números dados. Dividem-se os números dados por qualquer fator primo comum a dois ou mais dêsses números. Escrevem-se os quocientes abaixo do número dividido e baixam-se os números não divisíveis, formando nova linha horizontal. Continua-se

(*) N. da tr. Os americanos do norte chamam divisões e multiplicações *longas* embora, em si, não o sejam, às divisões e multiplicações de número composto por composto. E' que longo, aqui, refere-se ao processo e não à extensão da operação.

a divisão por um fator primo comum a dois ou mais números, até que todos os quocientes sejam primos.

b. Para dividir por qualquer número, pode-se multiplicar pela sua recíproca.

c. Para achar o volume de qualquer sólido, reduzem-se as três dimensões à mesma unidade de medida.

d. Para dividir a moeda dos Estados-Unidos, divide-se o número como em divisão comum e coloca-se um ponto no quociente, imediatamente após haver dividido o número do dividendo no qual se ache.

e. Quando o dividendo é um número concreto e o divisor um número abstrato, o quociente e o dividendo são da mesma espécie.

f. Quando o dividendo e o divisor são multiplicados ou divididos pelo mesmo número, o quociente não se altera.

g. Regra para notação: Começar à esquerda e escrever os algarismos de cada classe na respectiva ordem, preenchendo com zeros as ordens e as classes que faltem.

5. Examinar o desenvolvimento gradual da compreensão de razões e proporções e suas aplicações, II, metade inferior da pág. 137 (*); II, fim de 230, 231 e 232; III, 76, 77, 78, 79, 114, 115 e 116. Observar, especialmente, como se organizaram os trabalhos de maneira que o aluno aprendesse, através de suas próprias atividades.

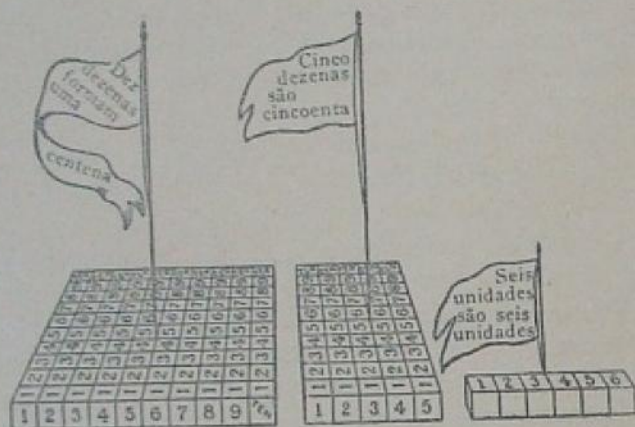
6. Comparar as ilustrações abaixo. São de material próprio para auxiliar a compreensão de processos da aritmética. Dizer em cada caso, qual dos dois parece mais útil.

A 1

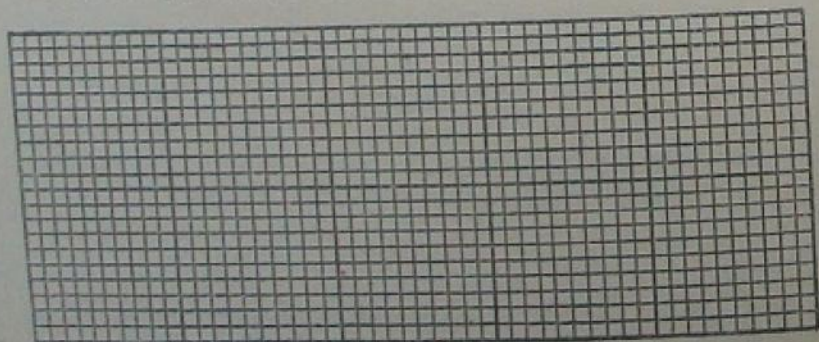
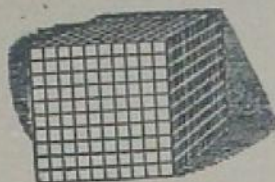
Traçam-se no quadro negro linhas de 1, 10, 100, 50, 6 e 156 polegadas de comprimento.

(*) Daquí em diante, as referências à Aritmética de Thorndyke serão indicadas simplesmente pelo número do volume, I, II, III, e número da página.

A 2

Dez dezenas formam uma centena
Cinco dezenas são cincoenta unidades
Seis unidades são seis unidades

Uma centena Cincoenta Seis

B 1

Há mil quadrinhos nesta figura.

B 2

Há mil cubinhos nesta pilha.

C 1

NÚMEROS NEGATIVOS

1. *A* está situado mais alto que *B*. Quanto?

2. Quanto mais alto do que *C*?

3. Do que *D*?

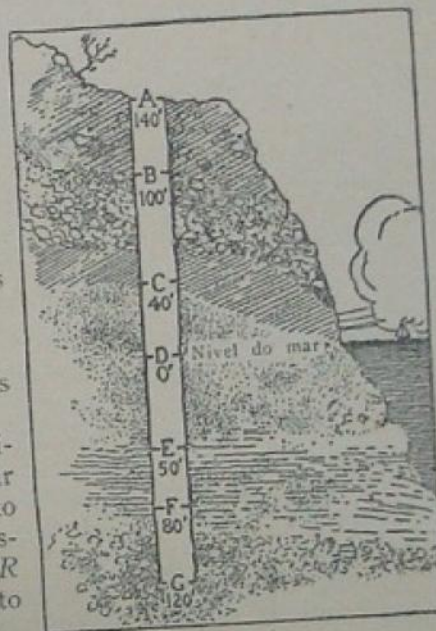
4. Do que *E*?

5. Do que *F*?

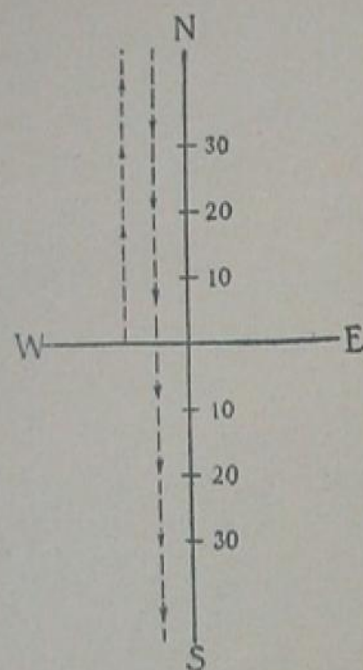
6. Quanto está *D* mais alto do que *E*?

7. Do que *F*?

8. Quanto está *E* mais alto do que *F*?

9. Representar as posições acima do nivel do mar por + e as posições abaixo do nivel do mar por —. Assim: *M* está a + 42 pés, *R* está a — 36 pés. Quanto está *M* mais alto do que *R*?

10. *N* está a + 940 pés; *S* está a — 60 pés. Quanto se acha *N* mais alto do que *S*?

C 2

Um navio sai do ponto *O* para o norte, a 10 milhas por hora. Ao fim de quatro horas, a que distância de *O* estará êle?

Outro navio, saindo do ponto *O*, navega durante quatro horas, rumo norte, a 10 milhas por hora; volta-se, então, para o sul e navega mais uma hora com a mesma velocidade. A que distância estará de *O*?

Designar a distância de *O* a *N* por + e a distância de *O* a *S* por —.

Se um vapor parte de *O* para o norte e, a 10 milhas, ruma para o sul, em cuja direção faz 90 milhas, onde se achará a esta altura?

Se um vapor navega de *O* para norte durante 3 horas, à velocidade de 15 milhas por hora e, então, ruma para o sul e navega durante 4 horas, à mesma velocidade, a que distância se achará de *O*?

CAPITULO IV

A FORMAÇÃO DE HÁBITOS E OS EXERCÍCIOS DE REPETIÇÃO

REPETIÇÃO VERSUS MOTIVAÇÃO

Os velhos métodos punham grande fé na mera freqüência — na mera repetição — para a aquisição de conhecimentos, de hábitos e desembaraço, em aritmética. Os alunos recitavam as suas tabuadas, uma, duas, três, cinco, dez, vinte vezes. Ouviam e viam que 7 + 9 = 16, 6 × 8 = 48, sempre do mesmo modo, hora após hora, dia após dia, e, muitas vezes, em uma vintena de tais repetições, não formavam coordenações perfeitas. Por que? Por que uma menina que, ao fim de poucas semanas, por simples exercícios casual, incidental, associou os nomes dos seus quarenta e cinco condiscipulos às respectivas feições, não chegou a aprender, entretanto, em tempo dobrado, mediante exercícios sistemáticos de repetição, a relacionar com as respectivas respostas, as quarenta e cinco combinações da adição, de 1 + 1 e 9 + 9? Por que um menino que, em dois meses de férias, aprendera sem nenhum esfôrço, em poucas experiências com cada um, a distinguir um milhar de casas, voltas, caminhos, flores, peixes, meninos, uso de instrumentos, particularidades individuais, expressões de gíria, pragas, etc. parecia, contudo, absolutamente incapaz de aprender, em um ano escolar, as tabuadas de multiplicar e de dividir?

Porque alguma coisa independente da repetição deve, evidentemente, atuar para o êxito do trabalho, alguma coisa a que podemos chamar interêsse ou motivo ou satisfação. Está provado que aquelas coordenações ou conexões que satisfazem a

alguma necessidade ou desejo profundo de aprendiz, se formam com pouquíssimas repetições. A observação dêste fato levou os psicologistas a formularem duas leis relativas à formação das conexões mentais.

A Lei do Exercício, assim enunciada: O uso fortifica e o desuso enfraquece as conexões mentais.

E a Lei do Efeito, assim enunciada: As conexões acompanhadas ou seguidas de estados de satisfação tendem a fortalecer-se; as conexões acompanhadas ou seguidas de estados de aborrecimento, tendem a enfraquecer-se.

A segunda lei, a lei do efeito, explica, à evidência, a enorme variação que se observa, quanto à assimilação de conhecimentos que, relativamente à extensão e complexidade, deveriam ser igualmente fáceis de aprender, e mostra que se desejarmos facilitar e abreviar o aprendizado, devemos, tanto quanto possível, captar a nosso favor a fôrça da satisfação. É o que os novos métodos veem tentando realizar. Para isto, empregam não só todos os meios capazes de despertar o interêsse geral, pelo estudo da aritmética, descritos em capítulo anterior, como processos particulares apropriados às formas especiais do trabalho aritmético, a que chamamos exercícios de formação de hábito ou "drill".

É muito mais poderosa a conexão ativa de dois fatos do que aquela que se forma pela atitude passiva de ouvir enunciá-los ou vê-los associados. Por exemplo, se, para fazermos que o aluno estude parte da tabuada ou outros fatos que tenha de aprender, tomamos um cartão, cobrimos com êle as respostas que acompanham o exercício e o entregamos ao aluno, afim de que pense na resposta e olhe cada uma para certificar-se de que acertou ou para aprendê-la, (se não sabe ou não tem confiança na que pensou) e assim continua até poder dar todas as respostas exata e ràpidamente, o aluno chegará não só a conhecer os fatos, mas a *saber que os conhece,* porque os aprendeu ativamente. Com o mesmo fim, pondem-se, utilizar também, cartões com a pergunta de um lado e a resposta do outro, especialmente, nos casos em que seja preferível que o aluno não receba auxílio algum, nem mesmo da ordem em que vem impressos os fatos.

Quasi todos os "drills" consistem não em uma série de fatos isolados e desrelacionados, senão em partes de um sistema total,

cada uma das quais pode, havendo sido aprendida em forma apropriada, auxiliar o conhecimento das demais. Aprendida em forma apropriada significa, aqui, aprendida em relação com os fatos já conhecidos e pronta a relacionar-se com o novo fato a aprender. Assim, ninguém que estivesse no uso da razão, ensinaria indiscriminadamente, na primeira lição sôbre a multiplicação, 2 × 3, 8 × 5, 14 × 9, 9× 7, 10 × 40, 6 × 60, e 4 × 7. Procuram-se lançar juntos no espírito do aluno fatos que se relacionem necessàriamente. Ora, esta regra presta-se a largas e engenhosas aplicações. Se pudermos lançar no espirito do aluno "três vezes 9 — = 27," "27 e 9 = quanto?" e "9, 18, 27, 36," de modo que se mantenham vigilantes no subconciente do aluno, prontos a auxiliá-lo, quando êle mesmo se interrogar "quatro vezes 9 — quanto?", a resposta 4 × 9 = 36 terá, assim, probabilidade de ser aprendida mais fàcilmente, articulando-se no sistema e facilitando, por seu turmo, nova conexão. O tempo gasto em entender os fatos e refletir sôbre êles é tempo duplamente economizado, pela mais fácil memorização que daí decorre. Quasi todos os conhecimentos de aritmética deveriam ser tratados como um sistema (*) de fatos arganizados e inter-relacionados.

Em alguns casos, a causa da incapacidade de provocar fàcilmente novas conexões acha-se muito longe, no início do aprendizado. Se, por exemplo, uma criança não recebeu uma noção real da significação dos números, se não é capaz de dizer que os alunos de sua classe são ao todo 20 ou 40 ou 60 ou 80, ou diz, como sucede muitas vezes, que uma jarda tem 15 ou 55 polegadas em vez de 36, ou escolhe 10 centavos e 10 centavos e 10 centavos de preferência a 70 centavos, compreende-se que a tabuada de multiplicar não represente para tal aluno senão um conjunto de sílabas absurdas, difíceis de aprender e quasi impossíveis de reter. Se um aluno não tem a compreensão nítida, real, quer das frações ordinárias, quer da notação decimal, não poderá aprender prontamente a operar com as partes alíquotas de um cento.

Se tentamos aprender um jôgo de uma só vez, nada apren-

(*) Excetuam-se certas questões como 1 ton. = 2000 lbs. e circunferência = $\frac{22}{7}$ do diâmetro.

demos e, o que é pior, podemos vir a considerá-lo acima de nossa capacidade, ou, ao menos a tomar a atitude prejudicial de quem está convencido de que vai errar e fracassar. Se, ao invés disso, começarmos o aprendizado do mesmo jôgo por um passo de cada vez, coordenando cada novo passo aos anteriores, até conseguir jogá-lo, como deve ser jogado, acabaremos alcançando o êxito desejado.

Uma operação como a soma de colunas, para um pequeno do 2.º ano ou uma divisão longa para um pequeno de 4.º ano ou uma divisão de decimais para um do 6.º ano significa, não a formação de um hábito, mas a formação e a organização de muitos hábitos. Constituem uma tarefa comparável à de uma inteligência adulta no aprendizado de um jôgo complicado. Daí haver o ensino enveredado nos últimos quarenta anos, para a formação gradual de certas capacidades, começando pelo estabelecimento de um hábito e continuado a juntar hábito a hábito, progressivamente, até integrá-los num só. Deste modo, focando a atenção em uma só coisa de cada vez, pode-se ter a certeza de que o aluno sabe o que está tentando aprender, aprende e sente prazer em aprendê-lo.

Assim, nos novos métodos, encontramos "drills" que exercitam exclusivamente na escolha do algarismo do quociente para divisões longas ou só na habilidade de colocar a vírgula, nas divisões de decimais ou mesmo só em mostrar por meio de exemplos numerosos que "x por cento de" significa "x centésimos ×", como se mostra abaixo:

Procure os quocientes e os restos. Pode acontecer, alguma vez, que você erre em algum algarismo do quociente. Então, procure ver se é forte ou fraco e substitua-o; faça o possível para acertar da primeira vez.

11. 817|28 — Em 81 há 3 vezes 28 ou só 2?

12. 992|47 — Em 99 há 2 vezes 47 ou só 1?

13. 538|27 — Em 53 ha 2 vezes 27 ou só 1?

17. 1249|312 — Experimente 4. Por que dá 3?

18. 375|151 — Vai experimentar 3 ou 2?

19. 375|123 — Vai experimentar 3 ou 2?

14. 476|17 — Em 47 há 3 vezes 17 ou só 2?

15. 1062|358 — Experimente 2 no quociente. Por que pensa que dá 2 e não 3?

16. 276|139 — Experimente 1. Por que não dá 2?

20. 650|225 — Vai experimentar 3 ou 2?

21. 425|25 — Vai experimentar 2 ou 1?

22. 470|15 — Vai experimentar 4 ou 3?

(Sem lapis.)

1. O quociente de 302175|395 é 765.

a. Dizer o quociente de 30,2175|3,95.

b. Dizer o quociente de 30,2175|39,5.

c. Dizer o quociente de 30,2175|0,395.

d. Dizer o quociente de 3021,75|3,95.

e. Dizer o quociente de 302,175|39,5.

f. Dizer o quociente de 3021,75|395.

2. Dizer os quocientes. Tomar cuidado com a vírgula.

A.	B.	C.
256864|349 *736 é o quociente*	*580272|924* *628 é o quociente*	*308750|475* *650 é o quociente*
2568,64|34,9	5802,72|9,34	30,8750|0,475
256,964|0,349	58,0272|9.24	308,750|4,75
2,56964|3,49	5802,72|92.4	308750 |47,5
25,6964|3,49	58,0272|0,924	30,8750|475

25,6864|34,9	5,80272|0,924	30,8750|4,75
2,56864|0,349	5802,72|92,4	3,08750|0,475
2568,64|349	580,272|924	308,750|475
256,864|349	58027,2|924	308,750|47,5

"POR CENTO DE" SIGNIFICA "VEZES CENTÉSIMOS"

1. Ler e escrever os números que faltam:

a. 5 por cento de 30 significa $\frac{5}{100}$ de 30 ou 0,05 × 30 ou...

b. 6 por cento de 30 significa $\frac{6}{100}$ de 30 ou 0,06 × 30 ou...

c. 12 por cento de 50 significa $\frac{12}{100}$ de 50 ou 0,12×50 ou...

d. 95 por cento de 100 significa 0,95 × 100 ou...
e. 4 por cento de 25 significa... × 25 ou...
f. 8 por cento de 120 significa... × 120 ou...
g. 15 por cento de 30 significa... × 30 ou...
h. 18 por cento de 1000 significa... × 1000 ou ...

ESPECIALIZAÇÃO DE HÁBITOS

Uma coordenação aritmética, seja entre 6 × 7 e 42, pode reproduzir-se perfeitamente, dada a manutenção das mesmas condições existentes durante a sua formação, porém, pode reproduzir-se imperfeitamente ou mesmo não se produzir de todo, se essas condições forem de qualquer modo alteradas. O aluno que reage perfeitamente a 6 × 7 = ... pode errar em 378 onde
6,
——

é preciso conservar de memória a reserva 4 para adicioná-la depois ao produto conhecido. Pode ficar confuso pelo fato de ter de somar alguma cousa ao resultado obtido de 6 × 7, e ter de escrever apenas uma parte do resultado achado e guardar a

outra de memória para uso posterior. Assim, a habilidade de somas 3 + 9 = 12 não implica a de somar 13 + 9 = 22 ou 23 + 9 = 32. Até mesmo, algumas vezes, acontece que um aluno que não encontra a mínima dificuldade em somar 5 a 6,
5
quando está vendo o 6, fica embaraçado, tendo de somar 2 onde
4
——
não vê o 6, apenas o tem em mente.

Teòricamente, qualquer alteração nas condições que acompanham a formação de uma conexão ou coordenação mental, pode perturbar a sua reprodução. E a experiência atual veiu mostrar que as alterações das condições que acompanham a formação de tais conexões, às quais os velhos métodos não prestavam atenção, interferem, muitas vezes sèriamente, na atuação das coordenações e hábitos formados. Por isso, os novos métodos se armam contra qualquer confusão que se possa originar da alteração de tais condições, estabelecendo uma regra que auxilie, tanto quanto possível, a adaptação do hábito às novas circunstâncias. Algumas vezes torna-se necessário maior auxílio, como por ex., quando se tem de estender às operações com dezenas mais altas, o hábito de reagir corretamente às combinações da adição. Às vezes, basta para consegui-lo uma pequena orientação, uma leve variante de exercício, como o uso de 3 + 3 = 6 para responder à pergunta "duas vezes 3 = ?" ou 4 + 4 = 8 para responder a "duas vezes 4 = ?"

Importa efetuar em cada caso, prática especial e na quantidade exatamente necessária; e ainda, o que é mais importante: efetuá-la de maneira correta. Consideremos, por exemplo, a necessidade de estabelecer uma passagem entre a capacidade de usar as coordenações fundamentais da multiplicação, 1 × 1 a 9 × 9, isoladamente e a de usá-las em exercícios semelhantes a
729 648
4 9
——, ——, etc.

Consideremos os dois métodos seguintes:

A. Dar logo os últimos exercícios citados, explicando a necessidade de conservar as reservas de memória e

lembrar o que é preciso fazer com o produto obtido, dando exercícios como: "Multiplique cada um dos números 6, 4, 3, 9, 2, 5, 7, 1, 8 por 7 e some 2 ao produto. Multiplique cada um dêles por 5 e some 3 ao produto," etc.

B. Dar muitos exercícios semelhantes aos seguintes: $(4\times7) + 3$, $(5\times9) + 8$, $(6\times8) + 4$, antes de passar exercícios como $\frac{729}{4}$, $\frac{648}{9}$ etc.

O método B é defensável mas, não é tão bom, como o método A, pois inclue o ensino do uso do parêntesis, que é talvez, para muitos alunos tão perturbador, como os novos hábitos, em si mesmos. Além de que, no segundo método, o número a somar está sempre diante dos olhos, enquanto no primeiro, em A, não o está o que se aproxima muito mais do processo real da multiplicação, em que se tem de conservá-lo de memória.

C. Permitir que o aluno escreva a reserva acima do algarismo do produto parcial ao qual deve ser somada, para evitar o esfôrço de ter de recordá-la.

Este método parece muito pior do que A e B. É admissível, sem dúvida, o uso de tal "muleta", algumas vezes apenas, para que o mestre se certifique se o aluno sabe *como efetuar* tais multiplicações; porém permitir-lhe que continue a usá-la por muito tempo com o fim de poupá-lo ao trabalho de formar o novo hábito, é simplesmente fugir a uma dificuldade; não é vencê-la. Isto o que pode é dificultar, mais tarde, ao aluno a transferência para o hábito correto, acrescendo que o uso extensivo da "muleta" a multiplicações de multiplicadores de dois e três algarismos, obriga os olhos e a mente a maiores esforços, porisso que teem de distinguir os algarismos do produto parcial,

que devem ser somados, dos algarismos da reserva, que devem ser abandonados, o que leva a erros e diminue a velocidade do trabalho.

Hábitos negligenciados

Em geral, os novos métodos preocupam-se mais com a formação de hábitos do que o faziam os velhos. Estes, muitíssimas vezes, presumiam que o aluno podia descobrir por si mesmo certos processos e aplicá-los sem o auxílio de nenhum exercício especial. A experiência real do ensino veiu, entretanto, provar que só com os alunos mais bem dotados se conseguiam tais resultados. Não é admissível supor que toda uma fileira de uma classe forme coordenações por iniciativa própria, ainda mesmo em casos que nos pareçam facílimos. Na realidade, não o são, parecem-nos assim, porque já as temos formadas.

Assim, não se deve crer que formadas as conexões $9 + 4 \longrightarrow 13$ e $6 \times 9 \longrightarrow 54$, estejam, conseqüentemente, estabelecidas as de $4 + 9 \longrightarrow 13$ e $9 \times 6 \longrightarrow 54$. Comumente, os inversos das combinações exigem atenção especial e "drill" em separado. Não se deve imaginar que o aluno que reage corretamente a 54 = tantas vezes 9 e 63 = tantas vezes 9, seja capaz de reagir perfeitamente a 58 = tantas vezes 9 resto... 70 = tantas vezes 9 + resto... Ao contrário, é muito mais acertado supor que três alunos dentre quatro não o sejam. Os novos métodos fazem efetuar "drill" específico para cada caso de divisão com resto, empregando exercícios como os das páginas 86, 87 e 88.

O aluno que aprendeu que "a dividido por $b = c$", ficaria muito embaraçado ao defrontar-se com "$a = b \times$ que?" ou "Quantas vezes $b = a$?" ou "$a =$ que $\times$ b?" ou "Quantas vezes a é maior do que b?". Isto significa que devem merecer "drill" especial cada uma das formas equacionais ou verbais que possam revestir os fatos da divisão.

COMPRA DE MATERIAL PARA CORRESPONDÊNCIA

Lapis, 2 ¢ cada um.	**Envelopes, 6 ¢ o pacote.**
Canetas, 3 ¢ cada uma.	**Lapis de côr, 7 ¢ a caixa.**
Borrachas, 4 ¢ cada uma.	**Blocos, 8 ¢ cada um.**
Tinta, 5 ¢ o vidro.	**Cadernetas, 9 ¢ cada uma.**

Escrever os números que faltam:

A.
Por 10 ¢ podem-se comprar... lapis.
Por 10 ¢ podem-se comprar... canetas e... ¢ de trôco.
Por 10 ¢ podem-se comprar... borrachas e... ¢ de trôco.
Por 10 ¢ podem-se comprar... vidros de tinta.
Por 15 ¢ podem-se comprar... lapis e... ¢ de trôco
Por 15 ¢ podem-se comprar... canetas.
Por 15 ¢ podem-se comprar... borrachas e... ¢ de trôco.

B.
10 = ...vezes 3, resto...
10 = ...vezes 4, resto...
10 = ...vezes 5, resto...
15 = ...vezes 2, resto...
15 = ...vezes 3.
15 = ...vezes 4, resto...
15 = ...vezes 5.
15 = ...vezes 6, resto...
15 = ...vezes 7, resto...

C.
5 = ...vezes 2, resto...
5 = ...vezes 3, resto...
5 = ...vezes 4, resto...
6 = ...vezes 2.
6 = ...vezes 3.
6 = ...vezes 4, resto...
6 = ...vezes 5, resto...
7 = ...vezes 2, resto...
7 = ...vezes 3, resto...

Ler as linhas abaixo. Dizer que número se deve colocar em lugar dos pontos. Onde houver *r* ler "resto".

D.
8 = ...vezes 2.
8 = ...vezes 3, r...
8 = ...vezes 4.
8 = ...vezes 5, r...
8 = ...vezes 6, r...

E.
9 = ...vezes 2, r...
9 = ...vezes 3.
9 = ...vezes 4, r...
9 = ...vezes 5, r...
9 = ...vezes 6, r...

F.
11 = ...vezes 2, r...
11 = ...vezes 3, r...
11 = ...vezes 4, r...
11 = ...vezes 5, r...
11 = ...vezes 6, r...

UMA CORRIDA DE "RESTOS"

Ler, substituindo os pontos pelo número conveniente. Ler "resto" onde houver *r*.

Depois de saber bem todas as respostas, peçam ao professor que faça um jôgo, uma *corrida*, para ver quantas respostas certas cada um é capaz de dar em 60 segundos.

A.
12=...vezes 2.
12=...vezes 3.
12=...vezes 4.
12=...vezes 5, r...
12=...vezes 6.
12=...vezes 7, r...
12=...vezes 8, r...
12=...vezes 9, r...

13=...vezes 2, r...
13=...vezes 3, r...
13=...vezes 4, r...
13=...vezes 5, r...
13=...vezes 6, r...
13=...vezes 7, r...
13=...vezes 8, r...
13=...vezes 9, r...

14=...vezes 2.
14=...vezes 3, r...
14=...vezes 4, r...
14=...vezes 5, r...
14=...vezes 6, r...
14=...vezes 7.
14=...vezes 8, r...
14=...vezes 9, r...

B.
16=...vezes 2.
16=...vezes 3, r...
16=...vezes 4.
16=...vezes 5, r...
16=...vezes 6, r...
16=...vezes 7, r...
16=...vezes 8.
16=...vezes 9, r...

17=...vezes 2, r...
17=...vezes 3, r...
17=...vezes 4, r...
17=...vezes 5, r...
17=...vezes 6, r...
17=...vezes 7, r...
17=...vezes 8, r...
17=...vezes 9, r...

18=...vezes 2.
18=...vezes 3.
18=...vezes 4, r...
18=...vezes 5, r...
18=...vezes 6.
18=...vezes 7, r...
18=...vezes 8, r...
18=...vezes 9.

C.
19=...vezes 2, r...
19=...vezes 3, r...
19=...vezes 4, r...
19=...vezes 5, r...
19=...vezes 6, r...
19=...vezes 7, r...
19=...vezes 8, r...
19=...vezes 9, r...

20=...vezes 2.
20=...vezes 3, r...
20=...vezes 4.
20=...vezes 5.
20=...vezes 6, r...
20=...vezes 7, r...
20=...vezes 8, r...
20=...vezes 9, r...

21=...vezes 2, r...
21=...vezes 3.
21=...vezes 4, r...
21=...vezes 5, r...
21=...vezes 6, r...
21=...vezes 7.
21=...vezes 8, r...
21=...vezes 9, r...

QUOCIENTES E RESTOS

Procurar os quocientes e os restos de cada uma das contas:

A.	B.	C.	D.	E.	F.
22=...vezes 3, r...	$25\vert\underline{6}$	$28\vert\underline{9}$	$32\vert\underline{8}$	$36\vert\underline{8}$	$40\vert\underline{9}$
22=...vezes 4, r...	$25\vert\underline{7}$	$29\vert\underline{3}$	$32\vert\underline{9}$	$36\vert\underline{9}$	$41\vert\underline{5}$
22=...vezes 5, r...	$25\vert\underline{8}$	$29\vert\underline{4}$	$33\vert\underline{4}$	$37\vert\underline{4}$	$41\vert\underline{6}$
22=...vezes 6, r...	$25\vert\underline{9}$	$29\vert\underline{5}$	$33\vert\underline{5}$	$37\vert\underline{5}$	$41\vert\underline{7}$
22=...vezes 7, r...	$26\vert\underline{3}$	$29\vert\underline{6}$	$33\vert\underline{6}$	$37\vert\underline{6}$	$41\vert\underline{8}$
22=...vezes 8, r...	$26\vert\underline{4}$	$29\vert\underline{7}$	$33\vert\underline{7}$	$37\vert\underline{7}$	$41\vert\underline{9}$
22=...vezes 9, r...	$26\vert\underline{5}$	$29\vert\underline{8}$	$33\vert\underline{8}$	$37\vert\underline{8}$	$42\vert\underline{5}$
23=...vezes 3, r...	$26\vert\underline{6}$	$29\vert\underline{9}$	$33\vert\underline{9}$	$37\vert\underline{9}$	$42\vert\underline{6}$
23=...vezes 4, r...	$26\vert\underline{7}$	$30\vert\underline{4}$	$34\vert\underline{4}$	$38\vert\underline{4}$	$42\vert\underline{7}$
23=...vezes 5, r...	$26\vert\underline{8}$	$30\vert\underline{5}$	$34\vert\underline{5}$	$38\vert\underline{5}$	$42\vert\underline{8}$
23=...vezes 6, r...	$26\vert\underline{9}$	$30\vert\underline{6}$	$34\vert\underline{6}$	$38\vert\underline{6}$	$42\vert\underline{9}$
23=...vezes 7, r...	$27\vert\underline{3}$	$30\vert\underline{7}$	$34\vert\underline{7}$	$38\vert\underline{7}$	$43\vert\underline{5}$
23=...vezes 8, r...	$27\vert\underline{4}$	$30\vert\underline{8}$	$34\vert\underline{8}$	$38\vert\underline{8}$	$43\vert\underline{6}$
23=...vezes 9, r...	$27\vert\underline{5}$	$30\vert\underline{9}$	$34\vert\underline{9}$	$38\vert\underline{9}$	$43\vert\underline{7}$
24=...vezes 3.	$27\vert\underline{6}$	$31\vert\underline{4}$	$35\vert\underline{4}$	$39\vert\underline{4}$	$43\vert\underline{8}$
24=...vezes 4.	$27\vert\underline{7}$	$31\vert\underline{5}$	$35\vert\underline{5}$	$39\vert\underline{5}$	$43\vert\underline{9}$
24=...vezes 5, r...	$27\vert\underline{8}$	$31\vert\underline{6}$	$35\vert\underline{6}$	$39\vert\underline{6}$	$44\vert\underline{5}$
24=...vezes 6.	$27\vert\underline{9}$	$31\vert\underline{7}$	$35\vert\underline{7}$	$39\vert\underline{7}$	$44\vert\underline{6}$

A.	B.	C.	D.	E.	F.
24=...vezes 7, r...	$28\vert\underline{3}$	$31\vert\underline{8}$	$35\vert\underline{8}$	$39\vert\underline{8}$	$44\vert\underline{7}$
24=...vezes 8, r...	$28\vert\underline{4}$	$31\vert\underline{9}$	$35\vert\underline{9}$	$39\vert\underline{9}$	$44\vert\underline{8}$
24=...vezes 9, r...	$28\vert\underline{5}$	$32\vert\underline{4}$	$36\vert\underline{4}$	$40\vert\underline{5}$	$44\vert\underline{9}$
25=...vezes 3, r...	$28\vert\underline{6}$	$32\vert\underline{5}$	$36\vert\underline{5}$	$40\vert\underline{6}$	$45\vert\underline{5}$
25=...vezes 4, r...	$28\vert\underline{7}$	$32\vert\underline{6}$	$36\vert\underline{6}$	$40\vert\underline{7}$	$45\vert\underline{6}$
25=...vezes 5.	$28\vert\underline{8}$	$32\vert\underline{7}$	$36\vert\underline{7}$	$40\vert\underline{8}$	$45\vert\underline{7}$

Repetir a página toda até conseguir achar todos os quocientes e todos os restos, sem êrro, em 20 minutos ou menos.

O aluno que aprendeu a reagir corretamente a "2, que parte é de 4?", "4 que parte é de 10?" e "6 que parte é de 8?", etc. (e que sabe dividir por fração), pode vacilar e ficar mesmo inteiramente confuso diante de casos, como "$\frac{3}{8}$ que parte é de $1\frac{1}{2}$?", "$\frac{3}{4}$ que parte é de $2\frac{1}{4}$?" Sabe que a expressão "que parte é de" designa uma divisão e sabe dividir por fração, mas pode não ser capaz de combinar os dois fatos e iniciar o novo hábito.

Os novos métodos, não há duvidar, estimulam o aluno a raciocinar e descobrir o que deve fazer, mas até onde seja capaz de fazê-lo. Não favorecem o aprendizado mecânico, em detrimento do aprendizado racional. Mas empenham-se em que, seja como fôr, o aluno adquira o novo hábito ativamente, forme novas conexões e tenha delas prática suficiente para mantê-las em vigilância e atividade constantes.

DA QUANTIDADE E DA DISTRIBUIÇÃO DA PRÁTICA

Os novos métodos procuram assegurar a motivação apropriada a cada coordenação aritmética desde a sua formação inicial, e, desde a formação inicial, pelo seu exercício continuado, procu-

ram adaptar cada coordenação aos seus vários usos, tomando em especial cuidado cada nova coordenação a formar. Ulteriormente, oferecem o treino necessário à fixação de cada uma, na quantidade indispensável a não se tornar prejudicial, e o distribuem, através do curso primário, de maneira a aparecer no momento preciso.

Os velhos métodos eram negligentes neste ponto, como ressalta do inventário que se fez da quantidade de prática que ofereciam e do modo de organizá-la, como se pode ver nas tábuas impressas às págs. 91 a 98.

O exame destas revela que os velhos métodos dedicavam pouca atenção ao problema da quantidade e distribuição da prática, oferecendo exercício insignificante no que concerne aos fatos mais difíceis e absolutamente insuficiente com relação a outros. É pouco acertado, por exemplo, efetuar, sôbre a combinação 8+8 um quarto apenas da prática que se oferece sôbre 2+2; dar sôbre 9 × 8, sòmente um oitavo da prática que se efetua sôbre 2 × 2, e sôbre 17-8, apenas um décimo da prática que se efetua sôbre 2 — 2. É fora de dúvida que fatos como 60 ÷ 7, 60 ÷ 8, 60 ÷ 9, 61 ÷ 7, 61 ÷ 8, 61 ÷ 9 e outros deveriam aparecer muito mais de uma vez por ano!

TÁBUA N.° 1

Quantidade de prática: Coordenações de soma apresentadas por um recente compêndio (A) de excelente reputação, Livros I e II, exclusive os "Suplementos" do fim das partes 1ª, 2ª, 3ª e 4ª.

A leitura da tábua mostra que 2 + 2 aparece 226 vezes, 12 + 2, 74 vezes, 22 + 2, 32 + 2, 42 + 2 e assim por diante, 50 vezes.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	226	154	162	150	97	87	66	45	....
12	74	53	76	46	51	37	36	33	....
22, etc.	50	60	68	63	42	50	38	26	....
3	216	141	127	89	82	54	58	40	....
13	43	43	60	70	52	30	22	18	....
23, *etc.*	15	30	51	50	42	32	29	30	....
7	85	90	103	103	84	81	61	47	....
17	33	25	42	32	35	21	29	16	....
27, etc.	30	23	32	29	24	23	25	28	....
8	185	112	146	99	75	71	73	61	....
18	28	35	52	46	28	29	24	14	....
28, etc.	53	36	34	38	23	36	27	27	....
9	104	81	112	96	63	74	58	57	....
19	13	11	31	38	25	14	22	11	....
29, etc.	19	17	27	20	32	32	19	18	....
2, 12, 22, etc. + ...	350	267	306	259	190	174	140	104	1790
3, 13, 23, etc.	274	214	238	209	176	116	109	88	1424
7, 17, 27, etc.	148	138	177	164	143	125	115	91	1101
8, 12, 28, etc.	266	183	232	183	126	136	124	102	1352
9, 19, 28, etc.	136	109	170	154	120	120	99	86	994
Totais	1174	911	1123	969	755	671	587	471	

Não se pode esperar um perfeito ajustamento entre a quantidade de "drill" e a sua distribuição, porque existem muitas outras necessidades a atender. Por exemplo, quando se está explicando um novo processo, os números usados em conexão com

êle deverão ser, propositadamente, fáceis de manejar, afim de que toda a atenção se polarize no processo, sem desvios para dificuldades acessórias. Pode acontecer que algumas conexões fáceis como 3 + 3, que de começo exigem muitos exercícios, recebam, ulteriormente um excesso de prática, pelo seu aparecimento forçado em novas combinações, como

TÁBUA N.° 2

Quantidade de prática: Conexões de subtração apresentadas por um recente compêndio (A) de excelente reputação, Livros I e II, exceto os "Suplementos" do fim das partes 1ª, 2ª, 3ª e 4ª.

Freqüência das subtrações: 1 menos 1; 2 menos 1; 2 ou 3 menos 1, 2 ou 3, etc.

Minuendos	*Subtraendos*								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	272								
2	214	311							
3	136	149	189						
4	146	142	103	205					
5	171	91	92	164	136				
6	80	59	69	71	81	192			
7	106	57	55	67	59	156	80		
8	73	50	50	75	50	62	48	152	
9	71	75	54	74	48	55	55	124	133
10	261	84	63	100	193	83	57	124	91
11		48	31	50	36	41	32	46	35
12			48	77	57	51	35	80	30
13				35	22	40	29	35	28
14					25	37	36	49	32
15						33	19	48	20
16							16	36	26
17								27	20
18									19
Total exclusive 1—1, 2—2, etc.	1258	755	565	613	571	558	327	569	301

TÁBUA N.° 3

Freqüência de subtrações não incluídas na Tábua n.° 2

Há casos, como 35—30, 46—46, etc., que o aluno, em virtude do grau de adiantamento em que se acha, efetuava como simples conexões.

Minuendos	*Subtraendos*									
	1 11 21 etc.	2 12 22 etc.	3 13 23 etc.	4 14 24 etc.	5 15 25 etc.	6 16 26 etc.	7 17 27 etc.	8 1 2 etc.	9 19 29 etc.	10 20 etc.
10, 20, 30, 40, etc.	11	29	16	52	32	51	7	30	22	69
11, 21, 31, 41, etc.	42	14	22	32	12	26	19	52	17	10
12, 22, 32, 42, etc.	47	97	5	13	9	21	11	24	19	17
13, 23, 33, 43, etc.	7	40	7	14	15	13	19	19	22	3
14, 24, 34, 44, etc.	8	28	14	58	13	16	14	26	19	7
15, 25, 35, 45, etc.	21	28	29	54	51	15	21	12	24	8
16, 26, 36, 46, etc.	5	18	12	27	35	69	13	17	19	2
17, 27, 37, 47, etc.	5	9	12	40	32	54	24	12	12	1
18, 28, 38, 48, etc.	2	16	10	23	22	36	18	47	16	0
19, 29, 39, 49, etc.	5	7	7	10	13	28	14	23	16	0
Totais	153	276	134	323	234	329	160	261	186	117

TÁBUA N.° 4

Quantidade de prática: Conexões de multiplicação, de outro recente compêndio (B) de excelente reputação. Livros I e II.

Multiplicadores	*Multiplicandos* 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*Totais*
1..........	299	534	472	271	310	293	261	178	195	99	2912
2..........	350	644	668	480	458	377	332	238	239	155	3941
3..........	280	487	509	388	318	302	247	199	227	152	3109
4..........	186	375	398	242	203	265	197	163	159	93	2281
5..........	268	359	393	234	263	243	217	192	197	114	2480
6..........	180	284	265	199	196	191	148	169	165	106	1923
7..........	135	283	277	176	187	158	155	121	145	118	1755
8..........	137	272	292	175	192	164	158	157	126	126	1799
9..........	71	173	140	122	97	102	101	100	82	110	1098
Totais ..	1906	3411	3414	2287	2224	2095	1836	1517	1535	1073	.....

TÁBUA N.° 5

Quantidade de prática: Divisões sem resto. Compêndio B. Livros I e II

Dividendos	*Divisores* 2	3	4	5	6	7	8	9	*Totais*
Todos os múltiplos dos números de 2 a 9, em seqüência, a saber: 4 ÷ 2 aparece 397 vezes, 6 ÷ 2, 256 vezes; 6 ÷ 3, 224 vezes, 9 ÷ 3, 124 vezes.	397	224	250	130	93	44	98	23	1259
	256	124	152	79	28	43	61	25	768
	318	123	130	65	50	19	39	19	763
	258	98	86	105	25	24	34	20	650
	198	49	76	27	22	30	33	16	451
	77	54	36	31	28	27	16	9	278
	180	91	50	38	17	13	22	16	427
	69	46	37	24	12	17	16	15	236
Totais	1753	809	817	499	275	217	319	142	.....

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$, $\frac{3}{8} + \frac{3}{8}$, etc. Assim, também, certas coordenações como os produtos de 5, embora fáceis de formar, teem de ser muito repetidas, pelo uso freqüente que teem na vida.

Devemos ainda notar que o repisar dos fatos ensinados ou o treino em uma coordenação que tenha sido suficientemente aprendida, relativamente, pouco pode prejudicar. Se, digamos, a conexão $4 \times 3 = 12$ estiver bem sabida, a respectiva reação se produzirá em 1 segundo, de modo que, se a repetirmos trezentas vezes mais do que o necessário, isto não representará senão uma perda de cinco minutos.

TABUA N.° 6

Conexões de divisão com resto e sem resto, Livro B.

Todos os trabalhos do 6.° ano, exceto avaliação de quocientes de divisões longas

Dividendo	2			3				4					5						6						
Divisor	1	2		1	2	3		1	2	3	4		1	2	3	4	5		1	2	3	4	5	6	
Freqüência	41	386		27	189	240		26	397	66	185		23	136	43	53	135		21	256	224	68	43	83	
Dividendo	7								8										9								
Divisor	1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Freqüência	23	72	55	38	46	32	54		17	318	30	250	22	-28	39	91		19	50	124	49	25	15	18	30	38
Dividendo	10									11										12							
Divisor	2	3	4	5	6	7	8	9		2	3	4	5	6	7	8	9		2	3	4	5	6	4	8	-9
Freqüência	258	38	46	120	19	9	24	24		32	21	16	3	6	11	14	3		198	123	152	29	93	9	16	7
Dividendo	13									14									15							
Divisor	2	3	4	5	6	7	8	9		2	3	4	5	6	7	8	9		2	3	4	5	6	7	8	9
Freqüência	45	16	15	11	7	4	5	3		77	20	13	5	8	44	8	6		69	98	16	79	8	8	4	6
Dividendo	16									17									18							
Divisor	2	3	4	5	6	7	8	9		2	3	4	5	6	7	8	9		2	3	4	5	6	7-	8	9
Freqüência	180	19	130	14	6	9	98	3		61	9	15	14	6	6	12	3		69	40	13	-6	28	7	7	23
Dividendo	19									20								21								
Divisor	2	3	4	5	6	7	8	9		3	4	5	6	7	8	9		3	4	5	6	7	8	9		
Freqüência	21	6	10	5	3	4	10	4		24	86	65	11	3	23	5		54	12	8	5	43	10	5		
Dividendo	22								23								24									

Freqüência	25								26								27										
Divisor	3	4	5	6	7	8	9-		3	4	5	6	7	8	9		3	4	5	6	7	8	9				
Freqüência	11	13	105	5	6	-5	3		5	6	3-	3	4	6	3		40	8	10	4	2-	6	25				-
Dividendo	28								29								30										
Divisor	3	4	5	6	7	8	9-		3	4	5	6	7	8	9		4	5	6	7	8	9					
Freqüência	4	36	8	3	19	3	7		-6	8	0	5	11	2	3		21	27	25	-6	7	13					
Dividendo	c1														33							c4					
Divisor	4	5	6	7	8-	9		4	5	6	7	8	9		4	5	6	7	8	9		4	5	6	7	8	-9
Freqüência	4	3	1-	1	4	2		50	11	3	6	39	5-		8	7	7	2	6	1		8	3	5	2	1	-1
Dividendo	c5														c7							38					
Divisor	4	5	6	7	8-	9		4	5	6	7	8	9		4	5	6	7	8	9		4	5	6	7	8	-9
Freqüência	10	31	5	24	5	3		37	16	22	-2	6	10		12	8	7	5	3	9		7	8	7	1	1	-5
Dividendo	39													41						42							
Divisor	4	5	6	7	8	-9		5	6	7	8	9		5	6	7	8	9		5	6	7	8	9			
Freqüência	4	3	7	4	3	1		38	9	2	34	2-		6	6	3	7	5		-7	28	30	10	3			-
Dividendo	43						48						45						50					51			
Divisor	5-	6	7	8	9		5	6	7	8	9		5	6	7	8	9		6	7	8	9		6	7	8	9
Freqüência	7	5	10	13	3		7	6	-4	5	0		24	6	7	10	-2		4	6	3	8		2	3	1	2
Dividendo	47						48						49						46								
Divisor	5-	6	7	8	9		5	6	7	8	9		5	6	7	8	9		5	6	7	8	9				
Freqüência	6	2	2	0	-3		7	17	4	33	2		4	7	27	9	20		3-	3	2	2	2				

TABUA N.º 6 — continuação

Conexões de divisão, com resto e sem resto, Livro B.

Todos os trabalhos do 6.º ano, exceto avaliação de quocientes de divisões longas

Dividendo	9		**55**					**56**							**52**					**53**					**54**		
Divisor	9		6	7	8	-9		6	7	8	9				6	7	8	9		6	7-	8	9		6	7	8
Freqüência	16		-5	3	4	2		0	13	16	8				5	5	5	3		-4	3	2	2		12	5	1
Dividendo			**60**				**61**								**57**					**58**					**59**		
Divisor	9		7	8	9		7	8	9						6	7	8	9		6	7	8-	9		6	7	8
Freqüência	3		3	9	1		1	2	5						0	3	1	3		2-	2	3	1		2	3	1
Dividendo				**66**				**67**							**62**				**63**				**64**				**65**
Divisor	-8	9		7	8	9		7	8	9					7	8	9		7	8	9		7-	8	9		7
Freqüência	10	1		2	1-	4		0	1	1					4	6	1		17	5	9		-5	22	0		1
Dividendo		**72**			**73**			**74**			**75**				**68**				**69**				**70**			**71**	
Divisor		8	9		8	9		8	9		8	-9			7	8	9		7	8	-9		8	9		8	9
Freqüência		16	10		7	5		3-	3		5	3			1	3	2		0	6	1		6-	2		1	0
Dividendo		**81**		**82**		**83**		**84**		**85**					**76**			**77**			**78**			**79**			**80**
Divisor		9		9		9		9		9					8	9		8	9		8	-9		8	9		9
Freqüência		15		2		4		-1		2					3	2		3	0		4	1		0-	2		4
Dividendo															**86**		**87**		**88**		**89**						
Divisor															9		3		9		9						
Freqüência															-0		3		2		7						

É antes o aprendizado deficiente das conexões difíceis e não o excesso de prática das conexões fáceis o defeito capital dos quatro casos citados.

Finalmente, devemos repetir que, para facilitar o aprendizado, é muito mais importante a hábil organização do trabalho e o interêsse que possa despertar do que a mera limitação da quantidade de "drill".

É, entretanto, possível efetuar "drills" adequados, sem prejuizos nem sacrifício do interêsse ou da boa organização dos trabalhos ou ainda da excelência geral do ensino da aritmética. Os novos métodos veem tentando realizar isto.

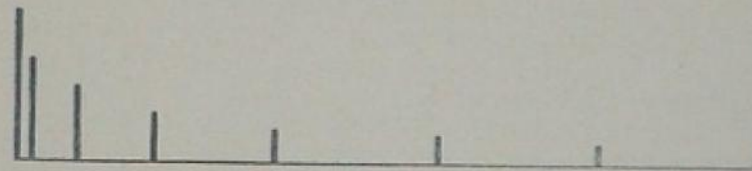



Fig. 1.

O melhor método de distribuição do exercício de determinada coordenação ou grupo de coordenações parece ser efetuar no início do aprendizado exercícios suficientes para formar a coordenação mais ou menos bem, e, depois, em quantidades cada vez menores, a longos intervalos, como mostra a fig. 1. Isto quanto ao aprendizado e fixação da própria coordenação. Há, porém, ainda a considerar a sua conexão com outras coordenações aritméticas e o seu uso em problemas práticos.

Os erros mais comuns em que, neste particular incorrem os professores e os compêndios de aritmética são:

(1) Efetuar prática excessiva no início do aprendizado.
(2) Deixar intervalos demasiado longos sem prática.
(3) Deixar grupos de conexões muito isolados de outros com que se devem relacionar.

Se a maior parte do exercício for concentrado no início, não só a revisão se fará insuficientemente, como êsse início se poderá tornar tão monótono que o aprendizado se faça mecânica e, por conseqüência, improficuamente. Se os intervalos forem excessivamente longos, não só se perderá a própria coordena-

ção, como poderão surgir várias dificuldades na formação de outras coordenações em que o auxílio daquela seja necessário. Se não se estabelecerem as conexões e correlações necessárias, o aluno ficará na situação de quem, tendo os conhecimentos em compartimentos mais ou menos estanques, não os pode combinar em novas emergências. Ficará apto a responder apenas às questões apresentadas exatamente na mesma forma em que hajam sido propostas pelo professor, capaz de aplicar a aritmética, sòmente quando restabelecidas as circunstâncias, sob as quais houver aprendido.

A distribuição apropriada da prática para cada uma das diferentes capacidades a serem desenvolvidas pela aritmética, torna-se, assim, uma tarefa delicada e complexa. Nessas condições, não se pode esperar que o professor a execute sòzinho. Se o compêndio ou o programa, que são os seus guias, o fizerem bem, seu ensino se tornará fácil e eficiente; se o compêndio e o programa forem falhos, não satisfazendo a todos as exigências do aprendizado, o seu ensino sofrerá com isso. E só poderá atenuar os prejuízos decorrentes de semelhantes falhas, emitindo o excesso de prática em certos pontos e suprindo lacunas em outros.

A figura 2 mostra a distribuição da prática sôbre 5×5 nos dois primeiros volumes dos três da série E. O diagrama representa aproximadamente quatro anos de trabalho escolar, do começo do 3.º ano, mais ou menos, ao fim do 6.º. Cada 15 avos de polegada do comprimento da linha da base, representa dez páginas do compêndio em questão (a começar da primeira lição sôbre 5×5). Cada 225 avos de polegada quadrada da área sombreada representa o aparecimento de 5×5 uma vez. Presumindo que o aluno haja feito todos os trabalhos dados, isto é, efetuado todos os exercícios contidos nas dez primeiras páginas, nas quais 5×5 aparece pela primeira vez, teria de pensar $5 \times 5 = 25$ quatro vezes; nas dez seguintes, três vezes; nas dez seguintes, uma vez; nas dez seguintes, nenhuma; nas dez seguintes, uma, e assim por diante.

As figs. 3, 4, e 5 mostram pelo mesmo processo, englobadamente, a distribuição da prática sôbre 7×7, 6×7 e 7×6 e sôbre as divisões de 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, e 89 por 9.

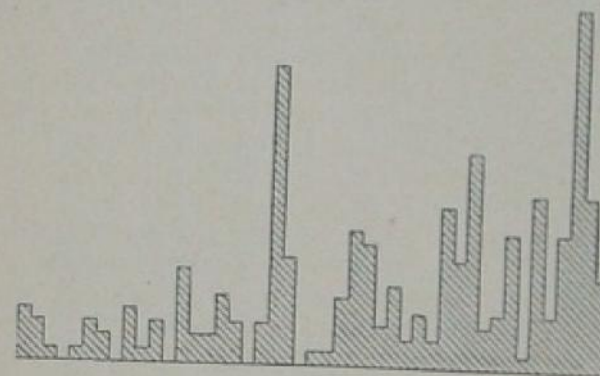



Fig. 2.

Nos diagramas foram contadas, sem exceção, todas as vezes em que ocorrem os casos em aprêço, seja em "drill", ou em problema, seja em operação de inteiros ou de frações, quer ordinárias, quer decimais, ou em percentagens.

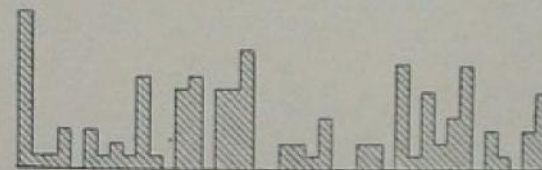



Fig. 3.

Os diagramas acima revelam a falta de um plano sólido de listribuição da prática. Parece mesmo que nenhum dos quatro volumes estudados obedece a plano muito bem elaborado. Em geral êsse aspecto tão importante do ensino pouca ou nenhuma atenção tem merecido dos velhos métodos.

Os novos métodos procuram distribuir a prática do melhor modo possível, isto é, de modo conseqüente com os outros aspectos desejáveis do plano geral de ensino.

Temas para discussão

1. Além dos meios gerais empregados para suscitar interê[sse] pela atividade mental e pela obtenção de resultados, q[ual] dos motivos enumerados abaixo, concorreu para aju[ntar]

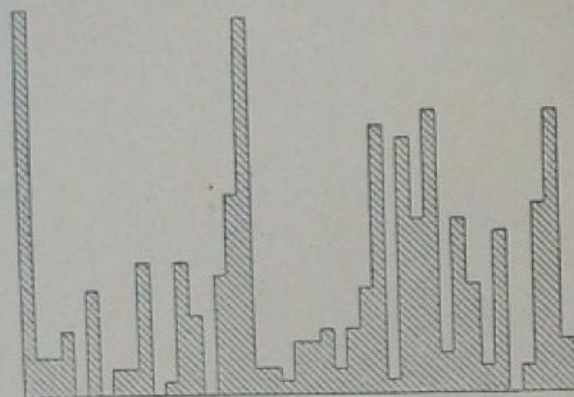



Fig. 4.

satisfação à efetuação de cada um dos dez "drills" que [se]guem? Para ganhar tempo, use as abreviaturas impress[as] à esquerda dos motivos.
I, 7, metade superior; I, 140, 141, Secção 19; I, 180; [I,] 34; II, 49; II, 101; II, 238; III, 31; III, 136; III, [...]

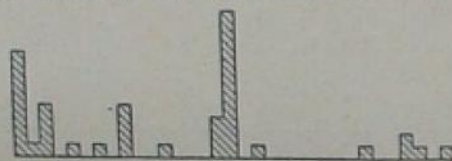



Fig. 5.

(1) Fis. Oportunidade para atividade física
(2) Q. C. Interêsse na decifração de quebra-cabeç[as]
(3) Or. Orgulho
(4) Nov. Novidade
(5) Prat. Aplicação prática
(6) Cria. Interêsse por outras crianças e pelo que e[las] fazem.

(7) Soc. Sociabilidade e ação de grupo
(8) C. I. Interêsse em competições individuais
(9) C. G. Interêsse em competições de grupo
(10) A. D. Interêsses de auto-direção

2. Em muitos casos, uma leve sugestão de competição, de corrida ou de jôgo, de um bem definido e possível padrão a atingir ou de uma legítima aplicação à vida, poderá ser acrescentada à satisfação provocada pelo êxito da aquisição ou aperfeiçoamento de uma capacidade. Qual a sugestão suscitada em cada um dos dez casos seguintes: I, 8; I, 31 e 33, Secção 51; I, 48; I, 118, 119; I, 213 ou 214; II, 46, metade inferior; II, 178; II, 221; III, 164, Ex. 5?
3. Que crítica se pode fazer a uma página de revisão da prática da multiplicação, distribuída do modo seguinte: 72 exemplos, 8 de números de 3 algarismos por números de 2 algarismos, 16 de números de 3 algarismos por números de 3 algarismos, 22 de números de 4 algarismos por números de 4 algarismos, 6 de números de 5 algarismos por números de 2 algarismos, 18 de números de 4 algarismos por números de 3 algarismos e 2 de números de 5 algarismos por números de 5 algarismos, dentre as quais o professor seleciona, apenas, os que julgue convenientes.
4. Que crítica se pode fazer ao seguinte modo de tratar as divisões longas, em uma revisão, por ex. do começo do 5.º ano? 1 página e $\frac{1}{4}$ de explicação; 54 exemplos, 18 de dividendos de 3 algarismos; 12 de dividendos de 4 algarismos; 24 de dividendos de 5 algarismos, sendo os divisores 11 ou 21 em 20 casos e 31, 41, 51, 61, 71 ou 91 nos demais; $\frac{2}{3}$ de página de explicações ulteriores; 18 divisões de números de 4, 5 e 6 algarismos por números de 2 algarismos; uma página de problemas variados; uma página de explicações e regras ulteriores; 50 divisões, quasi todas de números de 6 algarismos por números de 2, 3 e 4 algarismos; uma página de problemas; $\frac{1}{2}$ página de explicação

da divisão de moeda dos Estados Unidos de dividendos de 5 a 8 algarismos por divisores de 2, 3 e 4 algarismos.

5. Três hábitos distintos entram em função no aprendizado da divisão por 6. Quais são êles? (I, 73) Qual o quarto hábito a acrescentar, para dividir por 7?

6. À especialização de que hábito se presta o ex. 1, pg. 199, Livro II? Que precaução foi tomada, ulteriormente, na mesma lição, para assegurar a correta atuação do mesmo? A tábua abaixo dá o número de vezes que aparecem, em quatro compêndios, inclusive todo o trabalho do 6.º ano, multiplicações com vários multiplicadores, exceto como foi notado.

X designa qualquer dígito, exceto O.
Assim XXX designa um multiplicador semelhante a 385 ou 419.
XXO designa um multiplicador do tipo de 330 ou 410.
XOX designa um multiplicador do tipo de 305 ou 409.
XX designa um mulplicador do tipo de 47 ou 52.
XO designa um multiplicador do tipo de 20 ou 70.
XOO designa um multiplicador do tipo de 700 ou 500.

Os casos de multiplicação por 10 não são contados como XO; mas reünidos, separadamente, numa coluna encimada por 10.

FREQÜÊNCIA DE MULTIPLICAÇÕES COM DIFERENTES TIPOS DE MULTIPLICADORES

	XO	XOO	XX	XXO	XXX	XOX	10
A	198	55	725	75	155	33	73
B*	114	38	287	8	60	55	†
C	107	30	478	27	93	42	55
D	159	21	377	33	91	53	131

(*) O Livro B apresenta ainda três grupos de material de cálculo para uso do professor; compreende ao todo, 9 págs. de cálculos, que, por várias trocas, podem dar 32 multiplicações por XO, 20 por XOO, 113 por XX, 64 por XXO, 68 por XXX e 10 por XOX. Todavia, não se devem considerar como respostas à 7.ª questão.

† Os casos de 10 não foram levados em conta para o livro B.

7. Qual dos quatro livros estudados parece oferecer mais razoável quantidade de prática com os multiplicadores dos tipos XX e XXX, supondo que tenha havido cuidado e habilidade razoáveis em tornar o trabalho interessante?

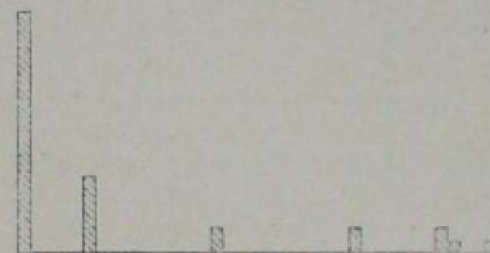



Fig. 6.

8. Qual dos quatro parece oferecer mais razoável quantidade de prática sôbre multiplicadores do tipo XOX?

9. Os diagramas abaixo e os da pág. 106 representam a distri-

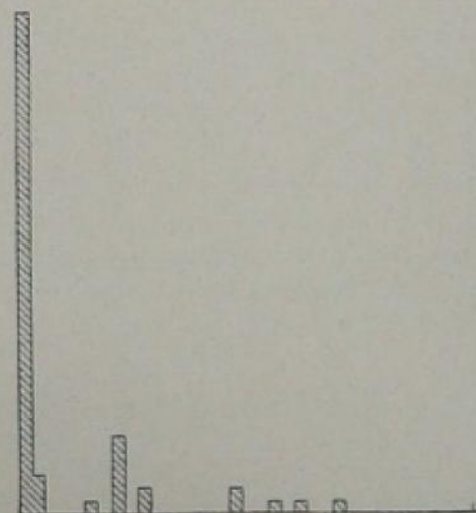



Fig. 7.

buição da prática com multiplicadores do tipo XOX, nos quatro livros citados. Indicar os dois que pareçam melhores.

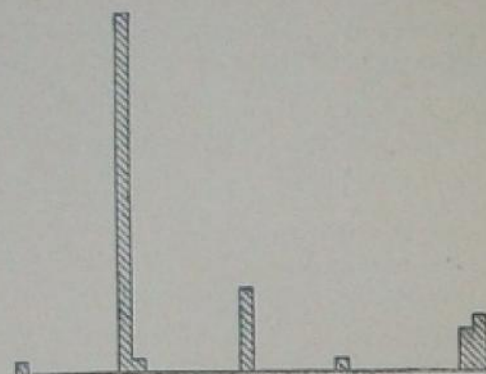



Fig. 8.

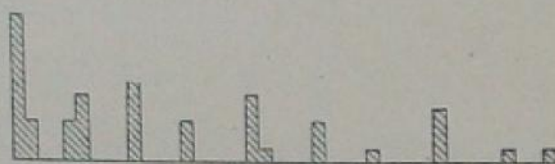



Fig. 9.

10. Como se explica que o livro C apresente ùnicamente êste caso, um dos mais difíceis da multiplicação, semanas depois da época em que costuma ser ensinada?

CAPITULO V

ORGANIZAÇÃO DO APRENDIZADO

O VELHO SISTEMA

O velho esquema da organização do aprendizado da aritmética era bonito de olhar, mas muito difícil de aprender. Supunha-se que o aluno aprendia na ordem seguinte:

Inteiros
Leitura e escrita de inteiros
Adição de inteiros
Subtração de inteiros
Multiplicação de inteiros
Divisão de inteiros
Moeda nacional
Leitura e escrita da moeda nacional
Adição da moeda nacional
Subtração da moeda nocional
Multiplicação da moeda nacional
Divisão da moeda nacional
Frações ordinárias
Leitura e escrita de frações ordinárias
Redução de frações à expressão mais simples
Menor múltiplo comum
Adição de frações ordinárias e de números mixtos
Subtração de frações ordinárias e de números mixtos
Multiplicação de frações ordinárias e de números mixtos
Divisão de frações ordinárias e de números mixtos
Frações decimais

Leitura e escrita de frações decimais
Conversão de frações ordinárias em decimais e vice-versa
Adição de decimais e números decimais mixtos
Subtração de decimais e números decimais mixtos
Multiplicação de decimais e números decimais mixtos
Divisão de decimais e números decimais mixtos
Números complexos
Redução de complexos em ordem ascendente e descendente
Adição de números complexos
Subtração de números complexos
Multiplicação de números complexos
Divisão de números complexos
Percentagem
Leitura e escrita de percentagem
Os "três casos" de percentagem:
I Multiplicação por percentagem
II Determinação da percentagem correspondente a certo número
III Determinação do número correspondente a certa percentagem
Aplicação do cálculo de percentagens à avaliação de juros, descontos, prêmios de seguro, taxas, dividendos, rendimentos de ações, etc.
Raiz quadrada e raiz cúbica
Extração da raiz quadrada e da raiz cúbica
Cálculo de áreas de certas superfícies e do volume de certos sólidos ou da capacidade ou conteúdo de certos recipientes.

Observando as dificuldades com que tinham de lutar os alunos, logo no início do aprendizado da primeira parte dêste programa, alguns professores, contra êle se vinham insurgindo. "Por que", ponderavam, "deverá uma pobre criança que mal principia a estudar, lidar com centenas, milhares e milhões se não pode conceber fàcilmente essas quantidades e se nem tem necessidade de entendê-las, antes de saber que 2 e 3 são 5 e 10 menos 6 são 4? Por que exigir que dominem completamente

a soma de inteiros, antes de lhes ensinar a subtraír?" Mas imprudentemente exageravam o seu ponto de vista, criando um sistema tão difícil, quanto o primeiro. Organizaram o aprendizado em tôrno dos números de modo que os alunos deviam aprender todas as combinações possíveis de soma, subtração, multiplicação e divisão com o número 4, depois com o número 5, depois com 6, e assim por diante.

Outros professores, revoltados contra o defeito que permanecia no programa, de se colocarem no início do aprendizado coisas muito difíceis, deixando muitas bem fáceis para o fim, pensaram em remediar o mal. Mas estes, também, se extremaram em suas correções, traçando um novo sistema em "espiral" pelo qual o aluno aprendia primeiro um pouco de adição, subtração, multiplicação e divisão, depois um pouco mais de adição, subtração, multiplicação e divisão, depois um tanto mais e assim sucessivamente. O artificialismo e as restrições dêste programa eram quasi tão perturbadores para o aprendiz, quanto as dificuldades do primitivo, acrescidas da perda do mérito principal do velho sistema, que era o de conduzir cada parte do aprendizado a um objetivo definido.

FINALIDADE DA ORGANIZAÇÃO

Os novos métodos trataram, antes de tudo, de penetrar a crítica superficial e apanhar uma compreensão nítida da finalidade a que deve tender um plano geral de organização do estudo da aritmética e do critério ou "padrão" à luz do qual deve ser julgado. E chagaram à conclusão de que o objetivo principal a ter em mira deve ser o de facilitar o aprendizado, auxiliar a fixação do aprendido e a sua aplicação à vida. Seja o sistema bonito de ver no papel ou um belo inventário do conteúdo da aritmética, bom para figurar num catálogo de estudos, ou uma relação bem organizada pela qual um compendista possa assegurar-se de que nada foi esquecido em seu livro, ou ainda uma relação que exponha claramente os tópicos principais da aritmética a uma pessoa que já a conheça, não importa — tudo isto tem relativamente alcance insignificante.

Houve entre os educadores uma infeliz paixão pela sistematização. Amavam o sistema pelo próprio gôsto de ordenar.

Estão, ainda, em uso livros de soletração em que se ensinam primeiro só palavras de uma sílaba, depois todas as de duas, depois as de três e assim por diante; ou em que se grupam aos pares palavras homófonas; ou em que se reúnem todas as abreviaturas comuns. Os livros de leitura costumavam começar com

ba be bi bo bu
da de di do du
fa fe fi fo fu

Os programas e os compêndios de aritmética não escaparam a esta nefasta paixão. Por exemplo, ùnicamente uma verdadeira mania de sistematização poderia diferir, para depois do aprendizado do complexo processo da divisão longa, o ensino de fatos como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ou $\frac{1}{2}$ de $4 = 2$, de tão fácil compreensão e tanta necessidade à criança, quer na escola, quer fora dela, ou relegar para os últimos anos do curso primário noções como 12 pol. = 1 pé, 3 pés = 1 jd., 2 pts. = 1 qt., 4 qts. = = 1 gal. ou 7 dias = 1 semana; ou usar o cálculo de juros como pretêsto para exigir que pobres inocentes quebrem a cabeça para achar o membro escamoteado ao quarteto: capital, juros, taxa e tempo.

Contra esta tendência de *mera sistematização,* do sistema pelo próprio sistema, erigido em ídolo nas escolas, protestam com veemência os novos métodos. Depois de haver aprendido aritmética para si mesmo, talvez valha a pena ao aluno gastar algum tempo na organização "lógica" de seus conhecimentos, pelo prazer de mera contemplação, e mesmo um pouquinho mais com assuntos inúteis para a vida em geral, mas de algum interêsse para o preenchimento das lacunas que hajam ficado no conhecimento integral do sistema. Entretanto, em geral, um sistema só tem valor até o ponto em que facilita ao aluno o aprendizado da aritmética e a sua aplicação à vida.

ORGANIZAÇÃO PARA O APRENDIZ

Uma disposição lógica da matéria, uma organização progressiva dos assuntos, como a do esquema das páginas 107 e 108, é muito bela, porém, grandemente prejudicial ao jovem aprendiz, que não pode apreciar a progressão para a qual o encaminham, porque nem sequer sabe para onde deve ir, porque nem mesmo percebe a simplicidade e o equilíbrio que tanto apreciamos num programa bem ordenado, pois que lhe são precisos seis anos ainda para completar o seu estudo! E quando chega lá pelo 8.º ano, provàvelmente, já não tem a mais leve lembrança se aprendeu a somar 1 e 3, antes de ter aprendido a dividir 400 por 40, ou 10×10, antes ou depois de haver aprendido $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Por êle, pelo aprendiz, custe o que custar, devemos romper a simetria da organização tradicional.

De fato, não há muito da simetria e da sistematização dos velhos planos nos programas, depois que os novos métodos os refundiram, adaptando-os às necessidades da criança. O que constituía um tópico unitário nos antigos programas, pode ser hoje dividido por todo o curso. Assim a redução ascendente e descendente de números complexos, desapareceu, como capítulo especial. Parte dêle foi incluído nas primeiras noções de multiplicação até 90×9 e nas divisões até $89 \div 9$; parte aparece em conexão com a multiplicação por números de dois algarismos e divisões longas, e parte foi associada às quatro operações de números compostos.

Hoje se pode romper rudemente a integridade lógica de um tópico para lhe arrancar a parte que alí se acha encravada ùnicamente para completar o esquema, e que não constitue base para novos conhecimentos, nem tem aplicabilidade na vida. Por exemplo, os alunos aprendem hoje a achar os juros, dados o capital, a taxa e o tempo, porém não a achar a taxa, dados o capital, os juros e o tempo, ou o tempo, conhecidos o capital, a taxa e os juros.

Um tópico que constitue uma unidade do sistema matemático, pode ser separado em várias unidades de ensino. Por

exemplo, a multiplicação por multiplicadores de três algarismos deve ser dividida em:

A. Multiplicação de multiplicadores sem zeros, como 465, 289, 372
B. Multiplicação de multiplicadores como 460, 280, 370
C. Multiplicação de multiplicadores como 400, 200, 300
D. Multiplicação de multiplicadores como 405, 209, 302

Também os casos de divisões longas em que aparecem zeros no quociente, devem ser tratados como unidades independentes, e o seu estudo prolongado até que a última dificuldade seja vencida e o processo dominado por completo. Os professores devem acautelar-se de não propor exercícios ou problemas em que possa aparecer *0* no quociente, antes que tenha sido estudada esta dificuldade, que é a maior das divisões longas.

O ensino de um tópico geral, que poderia ser aprendido consecutivamente, sem grande dificuldade, pode ser interrompido, para a efetuação de exercícios que façam entrar as capacidades até então adquiridas em conexões apropriadas, preparando o terreno de maneira que, quando retomado o fio interrompido, cada nova capacidade aprendida dentro do tópico geral, possa ser utilizada nas conexões estabelecidas imediatamente à sua aquisição. "Por exemplo, logo que as combinações de soma com resultados até 9 fiquem bem sabidas, pode-se ensinar o aluno a aplicá-las a somas como

3	2	3	2	3	2	2
1	3	2	1	2	1	2
5	4	4	3	3	2	4

e ainda mesmo a somas como

23	22	12	21	12
12	31	52	33	12
14	33	11	15	65

antes de serem aprendidas as combinações 5 + 5, 6 + 4, 4 + 6, 7 + 3, 3 + 7, etc., até 9 + 9. (*) O aprendizado das combinações de multiplicação pode ser interrompido, depois de aprendidos os produtos de 1, 2, 3, 4 e 5 pelos números de 1 a 10 (ou 1 a 9, em alguns programas), para introdução da multiplicação de números de dois e três algarismos por um número simples. O trabalho dado deverá, é óbvio, restringir-se ao círculo de combinações aprendidas. Por exemplo,

23	42	51	53	34	25
2	9	8	5	4	7

254	315	223	513	452	113	345
6	9	7	5	8	7	3

Êste plano assegura, desde cedo, o uso dos fatos da multiplicação nas conexões reais em que terão de ser empregadas, habilitando o aluno a aplicar o que sabe sôbre "vezes 6", "vezes 7", etc., a situações reais, logo depois de o haver aprendido. Diminue, também, a monotonia do trabalho oral de memória desta primeira fase do aprendizado e do cálculo escrito nas fases mais adiantadas.

Certa ordem pode mesmo ser adotada por mera variedade. Por exemplo, é aconselhável dar, muito cedo, no início do curso, uma noção de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ em casos muito simples, pelo valor prático de tal conhecimento, mas ministrá-la no momento em que possa trazer maior vantagem, como variação aos "drills" de soma e subtração. Não é que a variedade seja a ùnica ou mesmo a razão principal para determinada disposição da matéria, mas é, muitas vezes, uma razão subsidiária.

(*) Esta forma particular da organização do aprendizado não é forçosamente a melhor. Depende até certo ponto do ano em que houver sido iniciado tal estudo. Entretanto muitos técnicos a teem adotado.

Parte de um tópico pode ser deslocada do lugar em que a chamada ordem "lógica" o situou, para o ponto onde a capacidade adquirida possa facilitar de modo notável a formação ou uso de outra capacidade ou ser por ela auxiliada. É esta uma razão para duas grandes alterações nos sistemas tradicionais: (1) ensinar a subtração paralelamente à soma, e (2) ensinar cada grupo de combinações da divisão ou "tabuada", paralelamente às multiplicações correspondentes. Desta forma, auxilia-se o aluno a aplicar o conhecimento que já possue à adquisição do novo conhecimento e também à verificação, pelo novo processo, dos resultados que obtém. O contraste serve ainda para fazer sobressair a natureza de cada processo. Também as combinações de 11 e 12 vezes 2, 3, 4, etc. e de 2, 3, 4, etc. vezes 11 e 12 deveriam ser removidas do início do aprendizado da tabuada de multiplicar para o das multiplicações e divisões longas. Isto reduziria, de mais de um sexto o trabalho de memorização das tabuadas, pois que se trata de combinações especialmente difíceis, e facilitaria muito o aprendizado das multiplicações e das divisões "longas", desde que, para facilitar os processos essenciais, se empregassem exercícios que contivessem um mínimo de dificuldade, como $\frac{45}{11}$, $\frac{52}{12}$ e 462 |11, 396 |12. Todos os produtos de 2, 3, 4, etc. vezes 12 deveriam ser ensinados, mais tarde, no total, por seu uso, em conexão com a dúzia, e os seus reversos, isto é, os produtos de 12 por 2, 3, 4, etc. também, embora menos freqüentemente usados. Quanto aos produtos de 11, parece, são tão necessários, em qualquer fase do aprendizado, como os de 25 ou 16. De fato, quasi nenhuma precisão temos dêles. Eram incluídos no velho sistema ùnicamente por amor à sistematização. Os produtos de 1 a 10 assim como os de 12 figuravam nos programas tradicionais por necessidade; os de 11, para embelezá-lo.

Afim de associar ou "integrar" capacidades que, de outro modo, não se poderiam relacionar em condições apropriadas, podem-se fazer transposições e transferências dentro do sistema formal. Assim, deve-se usar a forma "$\frac{1}{2}$ de" 2, 4, 6, 8, etc.

associada à tabuada de dividir, porque os problemas sôbre o custo de frações de jarda de tecido, de libra de carne, peixe, manteiga, queijo, açúcar, etc., exigindo cálculos com $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, etc. requerem o uso fácil desta forma de enunciar uma divisão, que, com outros números, pode também ser usada nos problemas de "partilha". Outras notáveis vantagens há neste modo de proceder. Nos melhores e mais recentes planos certas multiplicações de inteiro por fração ordinária são ensinadas, muito antes de ser conhecida a palavra fração e mais de um ano antes de começar, como tal, o estudo da multiplicação de inteiro por fração.

Do ponto de vista das necessidades do aluno, a falha mais evidente do sistema esboçado nas páginas 107 e 108 é, talvez, a da falta de revisões, que conservem vivas e vigorosas as capacidades adquiridas. Por exemplo, que acontecerá às divisões longas, durante os meses em que as frações ordinárias constituam o tópico em estudo? Cedo foi reconhecida tal dificuldade, mas, como de costume, o amor à sistematização transviou autores e professores. Inseriam apenas, aquí e alí, "Revisões", onde os alunos refaziam o que haviam feito anteriormente. Tais revisões eram meras repetições.

Os novos métodos estabelecem para a revisão um padrão muito mais alto do que uma indiscriminada repetição do mesmo trabalho pelos mesmos processos.

Em primeiro lugar, inquirem das capacidades que necessitam de revisão. Algumas há que as dispensam por terem de ser abundantemente exercitadas, ulteriormente, no curso do aprendizado. É óbvio, por exemplo, que as quarenta e cinco primeiras combinações de soma e as somas de poucas parcelas teem de ser repetidamente usadas, na soma dos produtos parciais da multiplicação de inteiros, de moeda dos Estados-Unidos, de decimais e de percentagens. Se a adição e subtração de frações forem praticadas, como devem sê-lo, largamente, com os números mixtos, ficará reforçada a prática de soma de regular número de parcelas. Para isto, contribue também, mais tarde, a adição de decimais. É claro que, em geral, o plano de revisão

de qualquer capacidade deve considerar todos os usos feitos da dita capacidade até êsse momento. As revisões não devem ser feitas indiscriminadamente. Algumas capacidades exigem poucos exercícios de revisão; outras nenhum. O número de revisões e o intervalo que deve medear entre uma e outra, difere de capacidade a capacidade. Qualquer sistema geral de revisão, qualquer plano preestabelecido, será mau.

Em segundo lugar, os novos métodos empenham-se em fazer, se possível, algo melhor do que repetir o mesmo trabalho, do mesmo modo. Considerando, de um lado que o aluno se desenvolve continuamente, sendo, portanto de presumir que vá tendo sempre novos conhecimentos de aritmética e, segundo o que se disse no capítulo III, maior capacidade para compreender as razões dos processos e da teoria geral da matéria, e que a variedade e o interêsse teem as suas exigências; e, de outro lado, que as revisões podem servir para "integrar" velhos hábitos, para facilitar o novo aprendizado e para mostrar inter-relações e novas aplicações, os novos métodos tratam de fazer revisões adaptadas às aptidões do aluno e às suas necessidades e de apresentar-lhe a dificuldade tão hàbilmente, quanto o fizeram por primeira vez.

É difícil exemplificar convenientemente, estes pontos, visto que a natureza e o valor de uma revisão só podem ser devidamente interpretados, quando conhecida a natureza e a quantidade de todo o trabalho relativo anterior. Para demonstrá-lo seriam indispensáveis muitas páginas. Entretanto, pode-se ter uma idéia da maneira pela qual a nova teoria de revisão atua na prática, pelas notas e ilustrações abaixo e das páginas 117, 118, 119, 120 e 121.

A primeira é uma revisão da tabuada de multiplicar, apresentada com uma alteração para adaptar-se ao modo por que é usada na multiplicação de números de dois ou mais algarismos. Dá-se no fim do 3.º ano.

I

3 9 5 7 2 6 8 1 4

1. Multiplicar cada um dos números dados por 6 e somar 2 ao produto.

2. Multiplicar cada um dêles por 7 e somar 3 ao produto.
3. Multiplicar cada um por 8 e somar 4 ao produto.
4. Multiplicar cada um por 9 e somar 5 ao produto.
5. Multiplicar cada um por 5 e somar 6 ao produto.
6. Multiplicar cada um por 4 e somar 7 ao produto.
7. Multiplicar cada um por 3 e somar 2 ao produto.

A segunda é uma revisão de soma, especialmente de 7, 8 e 9 e de certas subtrações de frações, feita em tôrno da avaliação de médias. Servem para o fim do 4.º ano. O velho material é assim apresentado sob nova feição.

II

1. Em dezembro, a média exata de Helena foi de $87\frac{1}{3}$. A de Catarina de $84\frac{1}{2}$. Quantos pontos está Helena acima de Catarina?

   $87\frac{1}{3}$ Que sabe a respeito de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$?

   $84\frac{1}{2}$ Que sabe a respeito de $1\frac{2}{6}$?

   Que deve fazer ao 4?

2. Procure a média de cada menina. Escreva as respostas claramente, de modo que possa vê-las com facilidade, pois terá de aplicá-las à resolução dos problemas 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

	Alice	*Dora*	*Ema*	*Graça*	*Luíza*	*Maria*	*Nell*	*Rebeca*
Leitura	91	87	83	81	79	77	76	73
Linguagem	88	78	82	79	73	78	73	75
Aritmética	89	85	79	75	84	87	89	80

Soletração	90	79	75	80	82	91	68	81
Geografia	91	87	83	75	78	85	73	79
Escrita	90	88	75	72	93	92	95	78
	—	—	—	—	—	—	—	—

3. Qual das meninas obteve a média mais alta?
4. Quantos pontos a média desta menina é mais alta do que a média imediatamente inferior?
5. Qual a diferença entre as médias das meninas que ficaram no primeiro e no último lugar?
6. A média de Ema é superior ou inferior à de Luiza? Quanto?
7. Qual a diferença entre as médias de Alice e Dora?
8. Que diferença há entre as médias de Maria e Nell?
9. Com as notas acima, formule cinco problemas sôbre médias e resolva-os.

A terceira é uma revisão do uso de sinais e de algumas das combinações mais difíceis de soma, subtração, multiplicação e divisão, de multiplicações por 10 e múltiplos de 10, do processo de avaliação da fração de um número, quando êste é múltiplo do denominador da fração e do processo da adição e subtração de frações. É arranjada de maneira a favorecer a fixação permanente de certos fatos como $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}$, $100 \div 25 = 4$, $\frac{1}{2}$ de $50 = 25$, e propositadamente superficial. Faz parte de um grupo de revisões do início do 5.º ano, as quais em conjunto, servem para denunciar ao professor as deficiências em pontos fundamentais devidas ao trabalho dos anos anteriores, oferecendo ao aluno oportunidade para remediá-las.

III

(Sem lapis)

1. Dê em 2 minutos todas as respostas que puder:

A.	B.	C.	D.	E.
$19 + 8 =$	$20 \times 9 =$	$\frac{1}{2}$ de $27 =$	$7 \times 11 =$	$6 \times 8 =$
$16 - 9 =$	$10 \times 7 =$	$12 - 9 =$	$75 - 25 =$	$36 \div 9 =$
$8 \times 7 =$	$63 \div 7 =$	$\frac{1}{4}$ de $28 =$	$10 \times 30 =$	$240 \div 6 =$
$54 \div 6 =$	$3 - 1\frac{1}{2} =$	$\frac{3}{4}$ de $16 =$	$66 \div 11 =$	$23 + 9 =$
$7 \times 6 =$	$2\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2} =$	$\frac{3}{4}$ de $36 =$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$	$\frac{3}{8}$ de $16 =$
$72 \div 8 =$	$81 \div 9 =$	$30 \times 12 =$	$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} =$	$\frac{1}{2}$ de $50 =$
$32 + 9 =$	$35 + 8 =$	$56 \div 8 =$	$100 \div 25 =$	$15\frac{1}{2} - 5\frac{1}{2} =$
$13 - 8 =$	$80 \div 20 =$	$7 \times 50 =$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$	$\frac{2}{3}$ de $36 =$

Pratique até conseguir acertar as cinco colunas, em 2 minutos.

A quarta é uma revisão de alguns dos elementos essenciais do conhecimento da natureza das frações ordinárias, das frações decimais, do valor relativo dos algarismos, do uso de zero e da técnica da divisão de frações. As questões exigem análise refletida e constituiriam verdadeiras "armadilhas", se fôssem dadas uma de cada vez, em circunstâncias propícias a desvios. Tais como se apresentam aquí, constituem meios suaves de levar o aluno à concepção clara dos princípios essenciais com que vem atuando. Esta revisão é, na forma, inteiramente diversa do próprio aprendizado inicial e representa não apenas uma recapitulação, mas um avanço considerável.

IV

(Sem lapis)

1. Em quais dos pares de números abaixo, ambos teem o mesmo valor, isto é, representam a mesma quantidade?

a. $\frac{3}{4}$	0,75	*l.* \$.001	$\frac{1}{10}$ de centavo
b. $\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	*m.* $1\frac{5}{8}$	$\frac{18}{5}$
c. \$10.5	\$10.50	*n.* $3\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$
d. \$10.5	$\$10\frac{1}{2}$	*o.* 86	860
e. \$10.50	\$105	*p.* 8,6	8,60
f. 1 bu.	32 qt.	*q.* 0,45	0,450
g. $1\frac{1}{2}$ bu.	$32\frac{1}{2}$ qt.	*r.* 0,45	0,045
h. 0146,3 mi.	146,30 mi.	*s.* $0,33\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
i. 018,7 mi.	180,7 mi.	*t.* $\frac{1}{4}$	0,25
j. $66\frac{2}{3}$ ¢	$\$\frac{2}{3}$	*u.* $\frac{1}{6}$	$16\frac{1}{3}$
k. $66\frac{2}{3}$ mi.	$\frac{2}{3}$ mi.	*v.* 0,4	$\frac{4}{5}$

2. Examine novamente os números. Quando encontrar dois que não tenham o mesmo valor, prove-o. Se precisar de lapis, use-o.

3. Leia cada uma das *igualdades* ou forma de indicar duas quantidades iguais. Se fôr realmente uma igualdade, escreva "verdadeira". Se não for, escreva "falsa".

a. $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

b. $0,08 - 0,09 = 0,017$

c. $\$\frac{3}{8} = 375$ cents.

d. $12 \times \frac{1}{2} = 12 \div 2$

e. $9 \div \frac{3}{2} = 9 \times \frac{2}{3}$

f. $7\frac{1}{2} \div 1\frac{1}{2} = \frac{15}{2} \times \frac{2}{3}$

g. $\frac{1}{8}$ de $24 = 24 \div \frac{1}{8}$

h. $6 \div \frac{3}{4} = 6 \times \frac{4}{3}$

i. $100 \times 0,46 = 46$

j. A recíproca de $3\frac{1}{2}$ é $\frac{2}{7}$

ORGANIZAÇÃO SEGUNDO AS NECESSIDADES DA VIDA

Até aqui, estudámos a moderna organização da matéria bem como outros aspectos do aprendizado da aritmética, do ponto de vista de uma melhor adaptação ao aprendizado. Retornamos, agora ao problema da melhor organização da materia, porém, em vista das necessidades da vida.

A vida organiza as suas exigências aritméticas não tanto pela natureza dos processos como pelas situações que envolve. Na vida corrente, não calculamos, pelo mero prazer de lidar com combinações aritméticas. Calculamos, quando, por exemplo, estamos empenhados em escolher presentes de Natal, projetando um veraneio, economizando para comprar uma bicicleta, planejando a construção de um jardim, tratando de obter certa importância para iniciar negócios, ou, ainda, quando estamos cozinhando. Os novos métodos tratam de organizar o aprendizado da aritmética em tôrno das situações freqüentes e instrutivas que requerem solução numérica até o ponto em que possam fa-

zê-lo, sem prejuízo do aprendizado dos fatos e princípios puramente aritméticos.

São desta natureza os exercícios que apresentamos ao fim desta pág. e ás págs. 123 e 124. Requerem o conhecimento das quatro operações de inteiros e de alguns casos muito simples de frações ordinárias. Devem ser dados ao 3.º ano, após a revisão do aprendizado do uso do relógio.

Para o quarto ano, as situações sugeridas pelos títulos de lições ou grupos de lições, que apontamos abaixo, podem constituir ótimos centros de exercício.

1. Atividades de férias
9. Material escolar
14. Jôgo de distância
15. Jôgo de economia
18. Telegramas, expressos e registados
19. Jôgo do "Caixa"
20. Plantas de casas
21. Desenho em escala
24. O horário escolar
45. Pesagem
46. Compra de doces
51. Pontos e médias escolares
53. Escrituração
54. Compra de frutas
58. O pomar de Henrique
60. Como Lewis ganha dinheiro
61. Como Elsa ganha dinheiro
67. No mercado de peixe
72. Uma festa de Natal
74. Ganho e economia
79. No açougue
87. Compras por atacado
98. Boletins
99. Ganho e economia

Quantas horas levará o ponteiro pequeno para andar...

1. Das 6 da manhã às 11 da manhã?
2. Das 6 da manhã às 3 da tarde?
3. Das 8 da manhã ao meio dia?
4. Das 8 da manhã às 5 da tarde?
5. Toda a volta, do meio dia à meia noite?
6. Da meia noite ao meio dia e depois outra vez até meia noite? Da meia noite ao meio dia e de novo até a meia noite faz 1 dia. Quantas horas tem um dia?
7. Quantas horas vão da meia noite às 2 horas da tarde?
8. Quantas horas vão do meio dia às 6 da manhã do dia seguinte?
9. Em algumas estradas de ferro chamam à 1 hora da tarde, 13 horas; às 2 horas da tarde, 14 horas e assim até às

23 horas. Como chamam às 5 da tarde? Como chamam às 9 da noite?

10. Na maior parte das estradas de ferro, as horas que vão da meia noite ao meio dia, chamam-se: 1 A. M., (*) 2 A. M., 3 A. M., etc., e as que vão do meio dia à meia noite, 1 P. M., 2 P. M., 3 P. M., etc. Quanto tempo tem de andar o ponteiro pequeno para ir das 5 A. M. às 7 P. M.? Das 9 A. M. às 4 P. M.? Das 3 A. M. às 7 P. M.?

Seguem-se exercícios sôbre $\frac{1}{2}$ de 12, $\frac{1}{4}$ de 12, $\frac{1}{6}$ de 12 e $\frac{1}{3}$ de 12.

1. Quantos minutos leva o ponteiro pequeno para ir das 2 às 3? Das 2 às 4?
2. Das 2 às 9? Das 12 às 12? das 12 à 1? Das 12 às 2? Das 12 às 8?
3. Que parte da hora são 30 minutos? Quantos minutos fazem $\frac{1}{6}$ de hora ou um sexto de hora? Que parte da hora são 15 minutos? Quantos minutos há numa hora e meia?
4. Quantos minutos há em $\frac{3}{4}$ de hora ou tres quartos de hora? Em meia hora?
5. Às 5 e 10 minutos, a mãe de Dick disse-lhe: "Você deve estar de volta dentro de um quarto de hora." A que horas deve Dick voltar?
6. Outro dia, às 4 e 5 minutos, ela lhe disse: "Você só pode demorar três quartos de hora." A que horas devia o menino estar de volta nesse dia?
7. Outro dia, um quarto antes das cinco, disse: "Você deve ir e voltar em 25 minutos." A que horas tinha de voltar o menino?
8. Passa um quarto das 4. "Você pode brincar até às 5 horas",

(*) N. do tr. A. M. = ante meridium P. M. = post meridium

disse a mãe de Will. "Até quando?" perguntou Will. Até que horas?

9. Quantos minutos vão das 9.40 A. M. às 10 A. M.? Das 9.40 às 10.20? Das 2.50 P. M. às 3.25 P. M.?

10. Das 3.48 P. M. ou 12 para as 4 P. M. às 4.09 P. M. ou 4 e 9 minutos? Das 9.52 ou 8 para as 10 às 10.07 ou 10 e 7 minutos?

11. Quantos são ao todo $\frac{3}{4}$ de hora e $\frac{1}{4}$ de hora?

12. Quantos são ao todo $\frac{1}{4}$ de hora e $\frac{1}{4}$ de hora?

As lições organizadas em tôrno dessas situações de vida ocupam cêrca de um quarto do trabalho escolar, constituindo atividades que, sendo escolhidas e arranjadas com inteligência, podem ser desenvolvidas, sem o mínimo prejuízo do aprendizado da parte puramente científica. Algumas poderão servir admiràvelmente como introdução a novos processos; outras constituirão, principalmente o "drill" necessário a certos processos, e, ao mesmo tempo, um passo natural para a intrudução de novo processo; outras ainda exigirão o exercício de grande parte das capacidades adquiridas.

Abaixo oferecemos exemplo de uma organização vasada nos moldes traçados. Não é uma lição isolada, nem grupos pequenos de lições, mas o trabalho de seis ou mais meses de um plano completo do 7.° ano elementar, partes II e III.

I. Teoria e Técnica Geral da Aritmética.

(Os parágrafos de 1 a 29 compreendem 27 páginas, inclusive revisões para cada um dos casos mais difíceis ou mais importantes da aritmética, até percentagens. Em todos os trabalhos houve a preocupação de pôr em evidência a teoria geral.)

II. Propriedades, Compra e Venda:

Parágrafos 30-33 Revisão de percentagens
34 Fixação de preços
35 Propriedade: inventários
36,37 Proteção de propriedade contra o risco de perda por fogo
38 Seguros: taxas
39 Seguros: avaliação
40 Compras: notas de venda, contas a pagar, recibos
41,42 Compras pelo correio e pelo telégrafo
43 Pagamentos em cheque ou cambial
44 Compras: desconto por pagamento à vista
45 Compras: desconto comercial
46 Prática da avaliação de descontos
47 Compras domésticas
48 Vendas: lucros e perdas
49 Vendas: lucro por unidade de tempo
50 Vendas com risco de perda
51,52 Algumas despesas de venda
53 Vendas em comissão
54 Recebimento de comissão por compra

III. Empréstimos: Juros

55 Economia de dinheiro e aquisição de propriedade
56 Aumento de dinheiro pelo acréscimo de juros
57 Caixa Econômica
58 Estréia em negócios
59 Empréstimo de dinheiro para negócio
60 Empréstimo a prazo curto
61 Empréstimo a longo prazo
62 Cálculo de prazos
63 Tabelas de juros
64 Compras a prestações
65 Revisão

As partes IV e V incluem razões, medidas de madeira, medidas circulares, triângulos semelhantes, uso de simbolos e equações e prática completa de toda a espécie de cálculo.

Como conseqüência da reorganização do aprendizado em tôrno de situações tomadas da própria vida, opera-se grande redução no número de problemas isolados que a velha escola apresentava. Entretanto, isto não eqüivale a dizer que devem ser excluidos de todo. As antigas séries "miscelâneas", dadas nas "Recapitulações gerais", serviam a um objetivo real, exigindo que o aluno mantivesse em atividade o repertório inteiro de suas capacidades. Se cada problema, por si só, fôsse real, bem formulado e não ultrapassasse o limite das experiências de linguagem e dos conhecimentos do aluno, poderiam em conjunto, ser úteis, já como exercício, já como teste. Vinte ou trinta dêles poderiam testar maior número de capacidades do que vinte ou trinta problemas que pertençam a qualquer situação real, em particular.

A *ordem* dos tópicos pode ser alterada de acôrdo com as necessidades da vida. Se, por exemplo, os alunos tiverem de deixar a escola, como sucede a muitos, no fim do 5.º ano, será, parece, muito melhor, talvez, transferir o estudo da divisão de decimais para o 6.º ano, substituindo-o por exercícios que os familiarizem com o processo básico de Calcular percentagens. A divisão de decimais é raramente exigida pela vida; ao contrário, a compreensão da significação de percentagens e a habilidade de achar uma dada percentagem é de uso vulgaríssimo. A nós nos parece que a importância capital dos juros, para as muitas crianças que deixam a escola antes de alcançar o 8.º ano ou mesmo o 7.º, está relacionada com lucros e economias, e, por conseqüência, com os juros compostos, que deveriam ser ensinados no começo do 7.º ano, pouco depois de bem aprendido o sentido geral de juro, antes de serem efetuados muitos exercícios de juros simples, e muito antes dos exercícios de juros sôbre empréstimos bancários. Comumente, o estudo de juros compostos aparece muito tarde, por ser mais difícil do que o dos juros simples, dizem. Tal conceito é completamente falso. Em se tratando de juros, a dificuldade está em lidar com o tempo. A avaliação de juros compostos pode ser longa, mas não difícil, pois que basta para isto, que o aluno simplesmente multiplique

uma, duas, três, etc. vezes pelo mesmo multiplicador, visto que as caixas econômicas não calculam juros em frações de dólar. (*)

Desde que as necessidades da vida levaram os seus imperativos até a escola, a atenção que se dispensava a certos fatos da aritmética, foi diminuindo até mesmo desaparecer de todo. Na vida, raríssimas vezes, surge uma tituação em que tenhamos de multiplicar números mixtos, ambos altos, como $48\frac{1}{2} \times 213\frac{\ }{4}$; ou somar ou subtrair frações, que não sejam

$\frac{\ }{2}$ com $\frac{\ }{3}$, $\frac{\ }{4}$, $\frac{\ }{8}$ ou $\frac{\ }{12}$,

$\frac{\ }{3}$ com $\frac{\ }{2}$, $\frac{\ }{4}$ ou $\frac{\ }{12}$,

$\frac{\ }{4}$ com $\frac{\ }{2}$, $\frac{\ }{3}$ ou $\frac{\ }{12}$,

$\frac{\ }{5}$ com $\frac{\ }{5}$,

$\frac{\ }{8}$ com $\frac{\ }{2}$ ou $\frac{\ }{4}$,

ou aplicar cálculos de frações complexas. Assim, sem nenhum prejuízo para o ensino, a multiplicação de um número mixto por outro, poderia ser dada como redução a fração por cancelamento; toda a parte que trata do menor múltiplo comum poderia ser suprimida; e deixar de ser dada a concepção geral de fração como qualquer número dividido por qualquer outro. Por moti-

(*) Os velhos métodos, ou por ignorância dêste fato ou por negligência, acrescentavam carga desnecessária no aprendizado dêste caso.

vos semelhantes poderiam ser omitidas ou estudadas superficialmente, sem grande perda, as aplicações menos comuns da divisão.

Tomemos mais um exemplo: os seguros de vida. Os seguros de vida parecem um tópico especialmente indesejável para meditação de meninos e meninas! Êste caso faz-nos remontar de novo ao começo, à paixão da mera sistematização. Não só o seguro contra morte constitue um assunto mórbido para crianças de treze e quatorze anos, como não constitue, lògicamente ou aritmèticamente, uma "aplicação de percentagem" ou um caso análogo aos seguros contra fogo. Não existe uma conexão importante entre o prêmio de $250 ou de $1000, do seguro e a percentagem. O seguro de propriedade é feito em benefício do próprio segurador; o seguro de vida, em benefício de outrem. Um constitue matéria de negócio; outro, em geral, matéria de sentimento, amor ou dever. Mas a ânsia de completar o sistema com tópicos e subtópicos importantes apanhou àvidamente a analogia existente entre as duas expressões, "seguro de vida" e "seguro contra fogo" e os reüniu sob um título comum. O prêmio é *per* alguma coisa, logo devia figurar entre as aplicações de percentagem!

A ARITMÉTICA COMO CIÊNCIA E COMO ARTE

O problema da sistematização e organização da matéria em aritmética é demasiadamente vasto e complexo para ser tratado esquemàticamente. Em essência, a aritmética é uma ciência e uma arte. Uma ciência comparável à *anatomia*, que a criança tem de conhecer, e uma arte comparável à cirurgia, que tem de praticar. Ou, por outra, um jôgo semelhante ao tenis cujas regras tem de conhecer e aplicar destramente. O que se quer é que, na medida de suas capacidades, adquira da ciência aritmética um conhecimento que a habilite a, quando defrontada com um problema, pensar através desta ciência, socorrendo-se dela para achar a solução; quer-se que possua, como parte de seu equipamento mental, o conhecimento de um conjunto de fatos e princípios ordenadamente progressivos e inter-relacionados; deseja-se dar-lhe a capacidade de aplicar efetivamente a arte aritmética na rua, em casa ou na oficina, quando compra ou vende, proje-

ta ou trabalha. Deseja-se que adquira habilidade e destreza no jôgo de responder às situações da vida pelo pensamento e pela ação aritmética. Os novos métodos ensinam a parte científica da aritmética tão bem quanto o faziam os velhos, senão melhor para a maioria dos alunos. Mas o seu maior carinho, em matéria de organização, dedica-o ao treinar racional do aluno na aritmética, como jôgo.

Para aprender a jogar tenis, não seria prudente fazer uma lista de todos os golpes específicos dêsse esporte, como se mostra abaixo, e exercitar-se em cada um dêles separadamente, como segue:

A. Golpes para a frente:

I. Acima da cintura

1. Muito rápido
   - a. para a direita { i. com corte, etc. / ii. sem corte
   - b. para a esquerda { i. com corte / ii. sem corte
2. Rápido, etc., como acima
3. Lento, etc., como acima

II. Abaixo da cintura

1. Muito rápido, etc., como acima
2. Rápido, etc., como acima
3. Lento, etc., como acima

B. Golpes para trás:
etc., como acima

É conveniente, sem dúvida, aprender primeiro os golpes mais fáceis, mas aprendê-los todos com uma bola real, em uma quadra real, em resposta a um competidor real.

O sistema ideal para aprender a jogar tenis, seria dar ao principiante um mestre que lhe ensinasse a técnica de cada golpe e o treinasse em cada um e nas diferentes combinações de golpes, nas condições e no momento apropriado, fazendo que todos os golpes se sucedessem na ordem mais adequada à obtenção do mais rápido progresso, e integrando-os todos na habilidade total de jogar um tenis real.

A organização ideal para aprender a *jogar* a aritmética, será, até certo ponto, ao menos, uma série semelhante de aquisições graduadas e atividades adaptadas ao desenvolvimento progressivo do aprendiz, conduzidas em competição, num jôgo real, sob condições reais.

Temas para discussão

1. Algumas das velhas aritméticas traziam, logo no início do aprendizado da adição, as combinações $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $0 + 2 = 2$, etc. Por que será melhor transferí-las para o 2.º ano, incluindo-as no aprendizado de somas de colunas?
2. Alguns professores costumam tratar da moeda dos Estados-Unidos, depois do estudo geral de decimais. Que vantagens haverá em ensinar mais cedo o seu uso?
3. Há, em aritmética, alguma razão científica para ensinar a fazer escriturações simples, em um dos momentos seguintes de preferência a outro? Fim do 4.º ano, princípio do 5.º, fim do 5.º, princípio do 6.º, fim do 6.º, princípio do 7.º, fim do 7.º, princípio do 8.º, fim do 8.º?
4. Quando se poderá ensinar (o mais cedo possível) a avaliar cientìficamente a área de paralelogramos e triângulos.
5. Que tópicos teriam a ganhar em facilidade, se se ensinasse o sistema métrico muito cedo, diga-se, no 4.º ano?
6. Examinar a organização do ensino das tabuadas de multiplicar e dividir, Livro I, parágrafos III e IV, pgs. 49 a 83. Comparar êste modo de tratar o assunto com o antigo, em

que se aprendia primeiro, toda a tabuada de multiplicar até 12×12, depois, toda a de dividir até $144 \div 12$, depois, então, as multiplicações breves.

7. Por muitas razões é da máxima importância ensinar os alunos a verificarem a exatidão da soma por processos objetivos, da multiplicação pela soma, da divisão pela multiplicação, etc. Procurar as páginas em que tais verificações servem, além disso, como uma forma útil de treino ou de revisão.

CAPÍTULO VI

APRENDIZADO DA SIGNIFICAÇÃO

DOS CONCEITOS NUMÉRICOS

Qualquer palavra ou algarismo só adquire sentido, quando associados a algum objeto, acontecimento, qualidade ou relação real. Seis é um absoluto não senso, que só deixa de sê-lo, quando ligado a seis seres reais, como meninos, contas, palitos, polegadas, pés ou o que fôr. A associação pode ser direta, por exemplo, quando mostramos uma linha de 45 polegadas, ou fazemos uma criança levantar um pêso de 45 libras, ou contamos os 45 alunos de uma classe. Pode ser indireta, por exemplo, quando as crianças que tenham aprendido 40 e 5 em conexão com a realidade, aprendem 45, como "40 mais 5". No estudo das medidas, é superior a qualquer conexão indireta aquela em que se leva o aluno a referir a medida à realidade, comparando-a com uma superfície, um pêso, uma extensão, etc. conhecidos; por exemplo, quando se concretiza o ensino, dêste modo: "A parede de nossa classe contém cêrca de 30.000 polegadas quadradas. Um carro de transporte vazio pesa cêrca de 35.000 libras". "Trace linhas de 40, 50, 60, 70, 80, 90 e 100 polegadas". "Levante a mão a 40 polegadas, aproximadamente, do soalho. Agora, levante-a mais 10 polegadas ou sejam 50 polegadas. Agora, mais 10, ou sejam 60 polegadas. Pode elevá-la a 70 polegadas? O mais alto dos meninos pode trepar na minha mesa e mostrar a altura de 100 polegadas".

Alguns aspetos da significação dos números parecem-nos tão evidentes que julgamos, todos os devem saber sem aprendizado especial, e, podemos despreocupar-nos de ensiná-los. To-

dos sabemos, por ex., que $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{6}$, etc. representam quantidades menores do que 1, e o sabemos tão bem, que nos parece intuitivo o seu conhecimento, e, em geral, deixamos de mencioná-lo. Porém, a uma criança $\frac{7}{8}$ pode parecer um número muito alto; portanto convém ao professor verificar se os seus alunos concebem as frações próprias como alguma coisa menor do que 1. Ordenar frações, como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ e $\frac{7}{8}$ por valores (com o auxílio de uma régua graduada em pés, se necessário) constitue um excelente exercício, neste caso. Todos sabemos perfeitamente que 10.000 representa uma quantidade muito elevada, mas a uma criança que vê o 1 e quatro zeros e que não está muito segura na teoria da numeração decimal, pode não parecer um número tão alto como 987. E', portanto, prudente mostrar-lhe uma superfície quadrada de 10.000 polegadas quadradas e lembrar-lhe que a distância de tal a tal lugar, que conheça e já tenha percorrido, é de 10.000 pés ou 2 milhas.

Os números não teem um sentido, mas vários. Assim, oito significa certo ponto ou lugar da série 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc., um lugar que fica logo depois de 7 e imediatamente antes de 9. Neste caso o conceito de oito acha-se relacionado ao de série. E' o que podemos chamar *sentido de série*. Oito significa, também, o número de objetos distintos que formam uma coleção, por ex.: 8 meninos, 8 chapéus, 8 contas, 8 lapis. Aquí o conceito de oito acha-se condicionado ao de coleção. A êste se pode chamar *sentido de coleção*. Oito significa ainda 8 vezes certa unidade, digamos um *pint* quer separados como 8 *pints*, quer reünidos em uma lata de um galão. Aquí expressa o número uma idéia de quantidade. A êste podemos chamar *sentido de quantidade* ou *razão*. (*)

(*) Oito pode, também, ser considerado como um número que possue certas propriedades em relação a outros. Sob êste aspecto, conhecer oito é saber que é duas vezes 4, 3 mais 5, 2 menos que

O professor não deverá descuidar-se da formação dêste último conceito, o conceito de razão. As crianças deveriam saber medir tão bem quanto contar e deveriam associar a idéia de 3, por ex., a qualquer unidade de medida, como polegada, pé, jarda, etc., tão claramente, que fôssem capazes de concebê-las como 3 objetos nitidamente separados, como maçãs ou botões, por exemplo. Um pouco mais tarde deveriam fazer uso de 3 para designar 3 pares, 3 dúzias ou 3 centavos, tão bem como para 3 unidades. Ainda mais tarde, três poderia significar 3 vezes qualquer coisa que seja tomada como unidade.

O conhecimento do conceito numérico pode ser de vários graus de precisão e perfeição. Não há necessidade que tal conhecimento seja perfeito; entretanto é forçoso que se possua em certo grau. A criança que saiba que um milhar é muito; que seria preferível possuir um milhar de dólares a possuir cincoenta dólares e saiba que um milhar de libras é mais do que ela seria capaz de levantar, fez algum progresso, embora não saiba que um milhar é composto de dez centenas e que cada centena consta de dez dezenas. Não é necessário nem aconselhável ensinar a significação completa e precisa de um número de uma só vez, pois que do conceito dos números muito mais e melhor do que pelo ensino formal aprende a criança, à medida que vai tendo experiências com êles.

Assim, por exemplo, o conceito de 24 poderá ir-se formando aos poucos, em experiências sucessivas. Primeiro, o aluno do 1.º ano aprenderá a achar a página 24 de seu livrinho de leitura; em seguida aprenderá a contar de 1 a 100 por unidades e depois por dezenas; vindo, então, a saber que 24 é igual a 2 dezenas e 4 unidades, que 24 centavos eqüivalem a 2 dimes e 4 centavos; mais tarde, descobrirá que $19 + 5 = 24$, $18 + 6 = 24$, etc. e depois, que oito vezes $3 = 24$, que seis vezes $4 = 24$, que 2 dúzias $= 24$. Mais tarde ainda, terá experiências com 2400 e 24.000. Estas e outras operações lhe ensinam mais e mais completamente o que significa 24.

10, etc. Êste conhecimento das relações de um número com outros é, talvez, melhor considerar como conhecimento das relações recíprocas dos números do que como conhecimento de sua significação.

A significação dos números é conhecida, de princípio, incompleta e vagamente mais pela regra do que pela exceção. Só o uso a vai integrando e esclarecendo progressivamente. Assim, para ensinar a significação das frações ordinárias, devem-se mostrar ao aluno, primeiro, algumas aplicações muito simples de meios e quartos, apresentando-os como comumente se usam no lar; depois, ensinar a tabuada de dividir como resposta a questões, como $\frac{1}{2}$ de 4 = ..., $\frac{1}{2}$ de 6 = ..., $\frac{1}{4}$ de 8 = ..., $\frac{1}{4}$ de 12 = ..., etc. Mais tarde, poder-se-á ensinar a reconhecer $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ de unidades claramente divisíveis, como bolos, maçãs, etc. Então, se poderá ensinar a reconhecer $\frac{1}{2}$ poleg., $\frac{1}{4}$ poleg., $\frac{1}{8}$ poleg., $\frac{1}{2}$ jd., $\frac{1}{4}$ jd., e outras frações de medidas de uso cotidiano. O aluno, em nenhum dêsses passos ficará com uma idéia completa de frações, mas cada um representará um valioso degrau para atingir o conhecimento total; porisso que se adquire muito mais fàcilmente e com muito maior proveito qualquer conhecimento, quando êle se desenvolve gradativamente. Constitue desperdício de tempo ensinar o conceito dos números muito antes de pôr em prática êsse conhecimento. O bom professor tratará de certificar-se em qualquer fase do aprendizado se o aluno conhece bastante o sentido dos números para aplicá-los inteligentemente às suas necessidades atuais, tomando, porém, a precaução de ensinar algumas noções mais complexas.

Ao "objetivar" um número — isto é, ao relacioná-lo com a realidade, que lhe dá significação — devemos considerar, não só a sua apresentação formal e sistemática por meio de pontos, contadores, traços, etc. como mostra a Fig. 10, mas também em associações não formais e incidentais, como as que se podem fazer com objetos e atos da vida cotidiana. O último tipo de

concretização é muito mais interessante e apresenta, além disto, muito maiores probabilidades de contribuir para o entendimento da noção que se pretende dar. Devemos observar ainda que os fatos empregados para auxiliar a assimilação do conceito de um número não devem ser de mais difícil compreensão que a do próprio número.

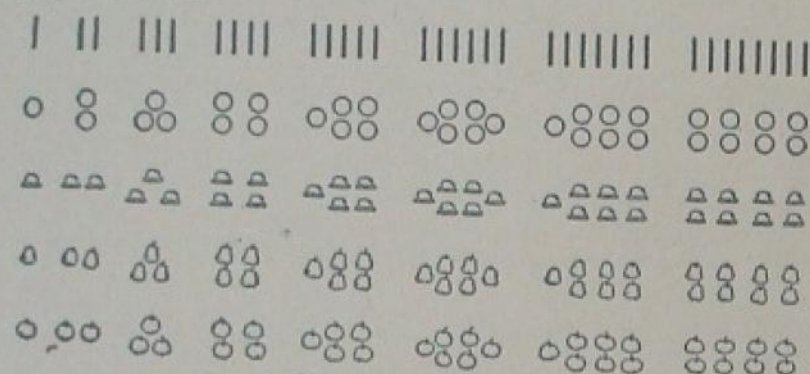
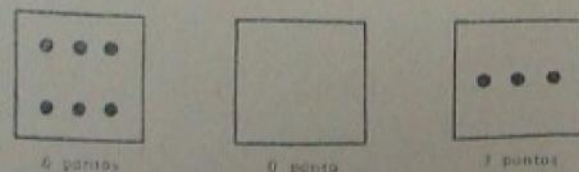



Fig. 10

Os professores, em geral, descuidam-se de ensinar a significação de 0, o mais importante, talvez, de todos os números. O 0 tem, primàriamente, à semelhança de todos os números, uma significação adjetiva — *nenhum* — e assim deveria ser lido. Lê-lo expressando-o pela palavra "nada" é tão grande desacêrto como ler 1, dizendo "uma coisa" ou 4, dizendo "quatro coisas" ou 5 como "cinco coisas". O 0 deve ser objetivado ou relacionado com a sua própria realidade, mediante representações no quadro negro, da natureza das que mostramos abaixo, e através de subtrações onde constitua a resposta, por exemplo em problemas como os seguintes: "Ponha 5 lapis na caixa grande e 5 na caixa pequena [assim].

Tomo 2 lapis da caixa grande [assim]. Quantos lapis ficam na caixa grande?

Tiro 5 lapis da caixa pequena [assim]. Quantos lapis ficam na caixa pequena?".

DO CONCEITO COMUM A GRUPOS DE NÚMEROS

O conhecimento do sentido comum aos números de certa espécie (como inteiro, fração ordinária, número mixto, fração própria, fração imprópria, frações semelhantes, frações dissemelhantes, fração decimal, número composto) deveria ser formado após o conhecimento de muitos casos isolados de cada espécie. Assim, o aluno deveria aprender o que significa *fração*, depois de saber o que significam $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$, etc.

Do mesmo modo que a significação de cada número tomado isoladamente, a significação comum a grupos de números pode assumir diversos aspectos, segundo a maneira por que se encare. Assim, podemos conceber as frações próprias, como números inferiores a 1; como números que teem um numerador para indicar quantas partes da unidade são tomadas e um denominador para indicar o tamanho de cada parte; e como divisões por efetuar.

No estudo da significação comum a grupos de números, assim como na dos números isolados, não é necessário nem aconselhável, dar logo de início o conhecimento total da significação. O aluno deve aprender, por ex., primeiro que "Números menores que 1 são frações", depois, que "Números como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$, etc., são frações", para, depois de haver aprendido muito acêrca de frações, ficar sabendo que "Números como 2, 5, 7, 9, 11, 250 são *todos* inteiros", "Números como $\frac{3}{8}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{11}{8}, \frac{7}{6}$ são *todos* fracionários" e "Nú-

meros como $4\frac{1}{4}$, $2\frac{7}{8}$, $12\frac{3}{4}$, $1\frac{2}{3}$ são *todos* mixtos" e, mais tarde ainda, depois de ter numerosas experiências com decimais, aprender que "Números semelhantes a 0,1, 0,01, 0,001, 0,6, 0,06, 0,006, 0,8, 0,28, 0,004 chamam-se frações decimais ou simplesmente decimais" e "Números como 16,24, 9,05, 1,3, 2,7, 4,81 chamam-se números decimais mixtos ou simplesmente decimais". As frações ordinárias são, então, distinguidas das frações decimais.

Devemos observar que êsses enunciados, essas formas verbais simples, que encaminham o aluno e vão encadeando os seus conhecimentos em uma expressão única, não exigem o rigorismo de uma definição completa. O aluno não diz "Fração ordinária é isto ou aquilo", mas "Isto ou aquilo é fração ordinária", o que é rigorosamente exato, não obstante não ser uma definição completa. Se o leitor formular uma definição de inteiro ou fração ordinária que abranja todos os casos, verá que tal definição é menos útil ao aprendizado gradual de um conceito geral do que os conhecimentos sumários, mas seguros, que o aluno vinha adquirindo através de sua própria experiência. Só raramente os primeiros conhecimentos práticos do aluno são compatíveis com uma definição rigorosa.

DA SIGNIFICAÇÃO DAS OPERAÇÕES, TERMOS E SINAIS

A significação das quatro operações fundamentais, adição, subtração, multiplicação e divisão, é de ordinário, compreendida pelo aluno ainda que mal ensinada. O professor, entretanto, pode reduzir ainda as dificuldades, apresentando casos claros de somas objetivas e subtrações objetivas (tanto [1] tirando e fazendo observar o que ficou, como [2] fazendo observar o que se deve somar para perfazer a diferença que existe entre dois números), multiplicações objetivas e divisões objetivas (tanto [1] dividindo um número dado por, digamos, 3 para saber quantas vezes 3 está contido nele e quanto resta, como [2]

dividindo o número em 3 partes iguais para saber de que tamanho é cada uma).

Após exercícios que giram em tôrno de casos concretos, enunciados sempre em termos inconfundíveis, as palavras *somar, subtrair, achar somas, achar diferenças, achar restos* e os sinais + e — poderão ser ensinados com segurança.

A multiplicação deve ser introduzida, primeiro, sob a forma verbal "tantos cincos = tanto" em exercícios como "quatro 5 = ..., sete 5 = ...", e em casos muito claros, como "1 níquel = 5 cents, 2 níqueis = ... cents, 3 níqueis = ... cents, 1 jd. = 3 pés, 2 jds. =... pés" e a palavra *vezes* por meio de séries como "Gastam-se 5 cents para ir uma vez ao cinema, 6 vezes 5 cents ou 30 cents para ir seis vezes ao cinema, 4 vezes 5 cents ou 20 cents para ir 4 vezes ao cinema" e logo o sinal × com significação de *vezes*. As palavras multiplicar e multiplicação virão mais tarde, após experiências variadas, inclusive de casos de multiplicadores de dois algarismos, como em "Um bonde grande transporta 42 passageiros. Quatro bondes grandes transportam ... passageiros. Um bonde pequeno carrega 32 passageiros. Três bondes pequenos transportam ... passageiros".

O têrmo geral é, portanto, definido por casos particulares e por contraste. Por exemplo:

"*Multiplica-se*, quando se procura a resposta para questões como:

Quantos são nove vezes 3?
Quantos são 3 × 32?
Quantos são 8 × 5?
Quantos são 4 × 42?

"Se somamos 3 a 32 temos 35. 35 é a soma.

"Se subtraimos 3 de 32, temos 29, 29 é a diferença ou o resto.

"Se multiplicamos 32 por 3, temos 96. 96 é o produto".

Toda nova operação ou nova representação de operação

conhecida, como o emprêgo da forma $\frac{1}{2}$ de, $\frac{1}{3}$ de, $\frac{1}{4}$ de, etc. para indicar uma divisão, ou a solução de "$\frac{3}{8}$ de" pela divisão por oito e multiplicação por 3, ou o aprendizado da soma de frações, deve ser introduzida sob a forma de problemas concretos que mostrem claramente o fato de que se trata e despertem um razoável interêsse pelo trabalho. Às páginas 113, 114, 115 e 116, apresentamos exemplos para os casos seguintes:

I. Primeiros passos da interpretação de escalas de desenho e da avaliação de áreas de retângulos (3.º ano).

II. Multiplicação com multiplicadores de 2 algarismos.

III. Primeiros passos das divisões longas com a moeda americana.

I

Pé quadrado

1. O professor vai traçar no quadro-negro, retângulos de 1 pé quadrado, 2 pés quadrados, 4 pés quadrados e 10 pés quadrados. Repare bem. Diga quantos pés quadrados há em um retângulo de 3 pés de comprimento e 2 pés de largura.

Pense na tábua da mesa do professor.

Pense na porta de seu quarto.

Pense no assoalho da sala de aula.

2. Qual dêles terá 10 pés quadrados aproximadamente?

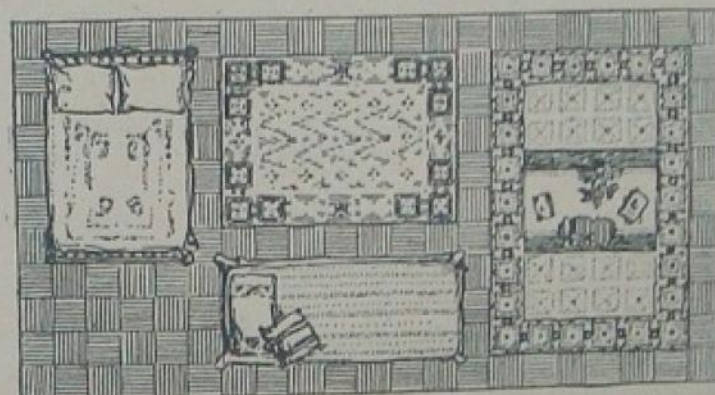
3. Qual terá 20 pés quadrados aproximadamente?

4. Qual terá 500 pés quadrados aproximadamente?

5. Desenhe no quadro negro um retângulo de 4 pés de comprimento e 2 pés de largura. Quantos pés quadrados terá?

6. Desenhe no quadro negro um retângulo de 3 pés de comprimento e 3 de largura. Quantos pés quadrados terá?

Desenho de plantas

Esta é a planta do quarto de Maria. — representa 1 pé linear ou um pé de comprimento. □ representa um pé quadrado.

1. A cama tem 6 pés de comprimento por 4 pés de largura. Quantos pés quadrados ocupa?

2. O divã tem 7 pés por 3 pés. Quantos pés quadrados tem?

3. O tapête grande tem 6 por 9 pés. Quantos pés quadrados cobre?

4. A mesa mede 3 pés por 4. Quantos pés quadrados mede?

5. O tapête pequeno mede 5 × 7 pés. Quantos pés quadrados mede?

6. Esta planta é da horta de Tom. Qual é a largura e qual o comprimento do espaço destinado às cenouras?

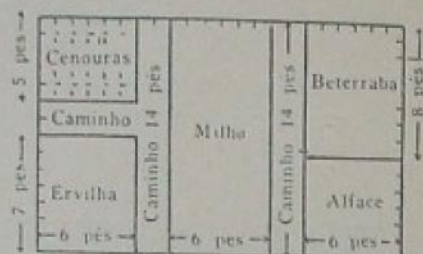
7. Qual o comprimento e largura do espaço plantado de favas?

8. Qual o comprimento e qual a largura da área cultivada com milho?

9. Quantos pés quadrados estão cultivados com cenouras?

10. Quantos pés quadrados tem o caminho que fica entre os canteiros de milho, beterraba e alface?

11. Desenhe uma planta de horta. Represente cada quatro pés por uma polegada. Assim, quantos pés representará $\frac{1}{2}$ polegada? Uma polegada e meia? Duas polegadas? E três polegadas?

Cenouras — Caminho — Ervilha — Caminho 14 pés — Milho — Caminho 14 pés — Beterraba — Alface — 5 pés — 7 pés — 8 pés — 6 pés — 6 pés — 6 pés

— representa 1 pé
□ " 1 pé quadrado
□ = 2 pés quad. □ = 4 pés quad.

Observe o leitor que na planta do assoalho, pág. 141, embora o madeiramento tenha sido dividido em quadradinhos que representam pés, afim de tornar reais as dimensões, não se pode avaliar a área, contando, pois a cama, o divã e os tapêtes não o permitem.

II

Material escolar

O Segundo Ano, Classes A, B e C, tinha o seguinte material:

3 caixas de lapis de 144 lapis cada uma.

6 caixas de giz de 144 bastonetes cada uma.

3 grandes caixas de cubinhos de uma polegada, com 1728 cubinhos cada uma.

5 caixinhas de moedas de brinquedo, com 250 pennies cada uma.

72 blocos de papel, de 96 fôlhas cada bloco.

1. Quantos lapis havia ao todo?
2. Quantos bastonetes de giz ao todo?
3. Quantos cubinhos ao todo?
4. Quantas moedas ao todo?
5. Quantas fôlhas ao todo?

Modo rápido de achar o resultado:

Pense "2 × 6 = 12" Escreva o dois debaixo do 2 de 72, na coluna das unidades. Não esqueça o 1.

Pense "2 × 9 = 18. 18 e 1 = 19". Escreva o 19.

Pense "7 × 6 = 42". Escreva o 2 debaixo do 7 de 72 na coluna das dezenas. Não esqueça o 4.

Pense "7 × 9 = 63. 63 e 4 = 67". Escreva o 67.

Some. Lembre-se de que o 672 são 672 dezenas, que valem 6720 unidades.

III

1. Os meninos e as meninas do "Welfare Club" querem comprar uma vitrola. Para isto precisam arranjar dinheiro. Combinam trabalhar para alcançar a soma necessária. São 23 ao todo. Podem comprar uma boa vitrola de segunda mão por $5.75. Quanto terá de ganhar cada um, dividindo-se o custo da vitrola igualmente entre todos?

Eis o melhor modo de resolver o problema:

Pense: Quantas vezes há 23 em 57? 2.

Escreva o 2 no quociente. Multiplique 23 por 2.

Escreva 46 debaixo do 57 e subtraia. Escreva o 5 de 575 depois do 11.

Pense quantas vezes há 23 em 115. 5.

Escreva 5 adiante do 2, no quociente. Multiplique 23 por 5.

Escreva o 115 debaixo do 115 que estava aí e subtraia.

Não há resto.

Coloque o $ e o ponto decimal onde fôr necessário.

Cada criança deve contribuir com 25 cents. Está certo o resultado, porque $.25 multiplicados por 23 = $5.75.

Em muitos casos as operações ilustram-se por si mesmas, melhor do que os problemas concretos que as requerem. Por exemplo, uma série direta como a que damos abaixo, facilita mais o aprendizado da raiz quadrada do que um problema como "Um terreno quadrado tem a área de 62.500 pés quadrados. Qual é o comprimento do lado?"

Examine a tabela abaixo. Preencha as faltas das últimas linhas. $\sqrt{\ }$ significa "raiz quadrada de".

A raiz quadrada de 16 é 4.	$4 \times 4 = 16$	$\sqrt{16} = 4$
A raiz quadrada de 484 é 22.	$22 \times 22 = 484$	$\sqrt{484} = 22$
A raiz quadrada de 25 é 5.	$5 \times 5 = 25$	$\sqrt{25} = 5$
A raiz quadrada de 400 é 20.	$20 \times 20 = 400$	$\sqrt{400} = 20$
A raiz quadrada de 49 é ...	$\sqrt{49} = \ldots$	
A raiz quadrada de 81 é ...	$\sqrt{81} = \ldots$	
A raiz quadrada de 36 é ...	$\sqrt{36} = \ldots$	
A raiz quadrada de 64 é ...	$\sqrt{64} = \ldots$	
A raiz quadrada de 1000 é ...	$\sqrt{1000} = \ldots$	

Na significação das operações, como na dos números, logo que o aluno conheça o suficiente para fazer delas uso inteligente, o melhor, na quasi totalidade dos casos, é deixá-lo aplicar os conhecimentos adquiridos, confiando em que o uso inteligente estabelece, estende e precisa a compreensão.

Se não houver entendido suficientemente a operação, o fato e a natureza da própria dificuldade se tornarão mais claros pelos erros que cometer do que pela extensão das discussões verbais que possa acompanhar sôbre a mesma.

DA SIGNIFICAÇÃO DAS MEDIDAS, DOS FATOS GEOMÉTRICOS E DOS TERMOS E OPERAÇÕES COMERCIAIS

O ensino de polegada, pé, quart, galão, rod, acre, jarda quadrada, pé quadrado, ângulo, paralelo, altitude, base, raio, diâmetro, desconto, juros, seguros, letras, títulos, dividendos, ações, etc., deve repousar nos mesmos princípios gerais sôbre os quais versaram as nossas considerações relativas ao aprendizado dos números e das operações. O leitor estará capaz de aplicá-los por si mesmo, e nós devemos fazer algumas observações sôbre certos fatos que algumas vezes são mal interpretados.

As associações das grandes medidas, como milha, geira e tonelada com a realidade, embora menos necessárias do que a concretização das medidas pequenas, merecem alguma atenção. Mesmo as crianças criadas no campo, são, muitas vezes, incapazes de bem avaliar a extensão de uma milha ou a área ocupada por um acre. O mestre deve procurar, entre as circunvizinhanças do local onde se ache situada a escola, alguns pontos bem conhecidos que distem dali, aproximadamente, 1 milha, 10 milhas, $\frac{1}{2}$ milha e $\frac{1}{4}$ de milha, para a essas distâncias referir a milha; algumas áreas que representem $\frac{1}{2}$ acre, 1 acre, 10 acres, etc., por exemplo um quarteirão central da cidade de Nova York, que mede cêrca de 4 acres, para dar a idéia de acre; e lugares onde se use a tonelada para dar a representação desta, tão fácil de relacionar, na maioria das cidades, com a medição de carvão, e, no campo com a medição de feno e grãos, e, tanto na cidade, como no campo, em representação grosseira, com o pêso de um Ford de turista ($\frac{3}{4}$ de tonelada).

Nos lugares em que a realidade é inacessível ou demasiado complexa para a observação dos pequenos, pode-se usar uma representação simplificada da mesma. Assim, não podemos segurar uma propriedade e esperar que ela queime para ensinar a avaliar seguros, mas podemos *brincar de seguro*, como se mostra às páginas 146, 147 e 148.

Êste jôgo não representará perda de tempo, contanto que os problemas empregados, abstração feita do jôgo, tenham valor real. A realidade sôbre seguros é, além de tudo, muito mais significativa para as crianças, num brinquedo, do que o espetáculo do pagamento de prêmios, de uma casa queimada, do pagmento de indenizações, etc.

O fato de termos de ensinar algo ao aluno sôbre seguros, não significa que devamos esgotar com êles o assunto, como o fato de ter de dar-lhe noções sôbre "títulos" e levá-los à compreensão do que sejam "ações" não quer dizer que devemos

ensinar-lhe tudo quanto se refere a títulos ou a ações. Os alunos podem muito bem aprender a preencher um cheque, a recebê-lo, etc. brincando de banco, mas não precisam acompanhar todas as minuciosas operações da abertura de uma conta bancária. Em muitos casos, a observação ou a representação da realidade total significam apenas maior gasto de tempo, produzindo maior confusão do que compreensão. Os alunos não aproveitariam tanto, com respeito aos objetivos da aritmética, com estarem presentes à organização de uma sociedade anônima ou à declaração de dividendos, com uma visita à bôlsa ou com a leitura do texto de uma ação da estrada de ferro, como empregando um quarto do tempo indispensável a um trabalho nessas condições num estudo simplificado dos fatos essenciais. Os compêndios e os professores que, para ensinarem o que é uma ação, mostram ao aluno uma ação comum, revelam ou não terem idéia êles mesmos do que seja uma ação ou terem idéias fantásticas a respeito das capacidades de um aluno de escola elementar ou desconhecerem o axioma fundamental de que o fim do ensino é auxiliar o aprendizado. Tudo quanto afirmámos anteriormente são verdades igualmente aplicáveis à escrituração mercantil, talões de impostos, etc. que, às vezes, se mostram aos alunos. São reais, mas a realidade pura não basta; deve ser realidade inteligível e educativa.

PROTEÇÃO DE PROPRIEDADE CONTRA FOGO

1. Paga-se alguma coisa para segurar uma propriedade contra fogo?

2. Sabe se seu pai paga algum seguro?

3. Se conhece alguma coisa útil sôbre seguros de vida, seguros contra fogo, seguros contra acidentes, seguros contra roubo ou seguros contra doença, prepare-se para explicá-lo à classe com toda a clareza.

4. Brinca-se de "seguro" assim:

Um aluno é a "Companhia de Seguros". Outro é o "Fogo". A propriedade a ser segurada é o trabalho escrito do teste impresso à pág. 148. Cada aluno faz o trabalho do teste, e coloca a sua fôlha numa pilha, sôbre a mesa do professor. O "Fogo" caminha para a mesa de olhos fechados e destrói uma das

fôlhas. Se a fôlha não estiver segurada, o dono terá de fazer os 20 problemas outra vez, depois da aula. Se estiver segurada, a "Companhia de Seguros" terá de fornecer-lhe 20 problemas resolvidos, em substituição dos seus. Aquele, então, dá os 20 problemas ao professor e não tem de refazer o teste. Para segurar a sua propriedade o aluno tem de resolver um dos cinco problemas extra que acompanha o teste e dá-lo à Companhia. Se prefere correr o risco de refazer os 20 problemas, não é preciso resolver o problema extra exigido, como pagamento do seguro. A "Companhia de Seguros" utiliza os problemas que recebe, para efetuar o pagamento das perdas causadas pelo "Fogo".

A "Companhia de Seguros" escreve para cada aluno que lhe paga um problema extra, um contrato como o que segue:

> Apólice n.° Prêmio, 1 problema
>
> ....10 A. M.
>
> A Companhia de Seguros do Sétimo Ano concorda em segurar .... pela soma de 20 problemas, contra a perda de sua fôlha de teste pelo fogo, dentro de cinco horas da data da assinatura.
>
> (Assinado)
>
> ....

Um contrato de seguro semelhante ao desta página chama-se APÓLICE.

A quantia que a Companhia de Seguros se compromete a pagar chama-se o VALOR da apólice.

A quantia que o aluno segurado paga, chama-se PRÊMIO.

O espaço de tempo pelo qual o aluno é segurado, chama-se TÊRMO.

5. Qual é o valor desta apólice?

6. Qual é o prêmio?

7. Qual é o têrmo?

8. Leia a descrição do jôgo, outra vez, pára saber o que deve fazer, se lhe couber a parte de "Companhia de Seguros", de "Fogo" ou de "Segurado".

Teste

20 problemas

1. Os membros da família Davis combinam economizar dinheiro para comprar um automóvel. Calculam em 80 cents os seus gastos semanais com cinema, no ano anterior. Decidem, então, dispender com o cinema apenas a metade dessa quantia. Quanto economizarão por ano?

2. No ano anterior, haviam gasto com roupa:

O Snr. Davis, $110.15 Helena, $115.30
A Sra. Davis, $175.25 Artur, $70.10

Resolvem reduzir essa despesa, como segue:

20 % nas roupas do senhor Davis
35 % " " da senhora Davis
35 % " " de Helena
15 % " " de Artur.

3. A senhora Davis tinha uma criada a quem pagava $18 por mês e uma lavadeira a quem pagava $1.35 por semana. Resolveu fazer ela mesma o trabalho e Helena e Artur prometeram lavar a roupa. Calculando a despesa de alimentação da criada em $2.25 por semana, quanto economizarão por ano, despedindo as empregadas?

(Seguem 17 problemas e 5 extra para pagamento de prêmio).

COMO TESTAR O CONHECIMENTO DA SIGNIFICAÇÃO

Para verificar se os alunos assimilaram, realmente, a significação de números, operações, medidas, fatos geométricos e comerciais, não é bastante pedir-lhes uma definição ou descrição dos

mesmos. As perguntas "Que é fração?" "Que é jarda cúbica?" "Que é desconto bancário?" "Que é trapézio?" parecem-nos muito apropriadas para estimular o mero aprendizado mecânico. A capacidade de responder a tais perguntas depende muitíssimo da facilidade de expressão. Desde que escapem à primeira objeção, como teste, são melhores as questões que exigem comparação, como "Que diferença há entre fração ordinária e fração decimal? Em que se assemelham?" "Que diferença há entre um retângulo e um paralelogramo?" "Que diferença há entre um paralelogramo e um trapézio?", porque, por elas, é mais fácil distinguir deficiências de conhecimento, através das deficiências de expressão.

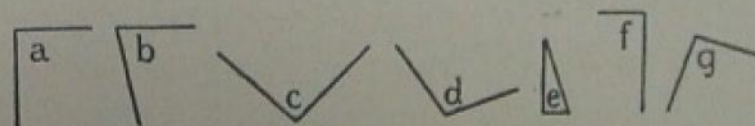
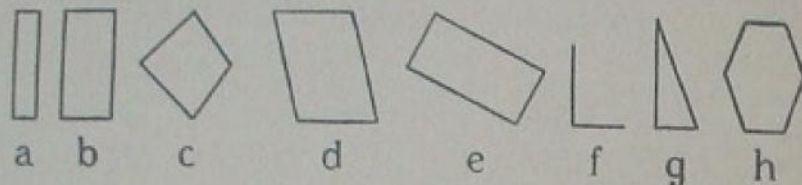
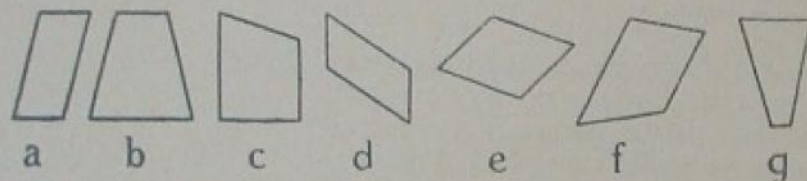
As definições e descrições não são apenas insuficientes como teste, raramente são bons testes. Em geral, são preferíveis os testes que requerem reconhecimento, classificação ou apresentação de exemplos. Por ex.:

A. 4.º ou 5.º ano. Escreva em 4 minutos o maior número de frações que puder.

B. 4.º ou 5.º ano. Quais das frações abaixo representam menos de meia libra? Marque-as com um m. Quais representam mais de uma libra? Marque-as com um M.

$\frac{3}{4}$ lb. $\frac{1}{3}$ lb. $\frac{1}{16}$ lb. $\frac{5}{16}$ lb. $\frac{7}{8}$ lb.

$\frac{2}{3}$ lb. $\frac{3}{8}$ lb. $\frac{1}{5}$ lb. $\frac{3}{10}$ lb. $\frac{5}{8}$ lb.

C. 4.º ou 5.º ano. Quais dos ângulos abaixo são retos?

D. 5.º, 6.º ou 7.º ano. Quais das figuras abaixo são retângulos?

E. 5.º, 6.º ou 7.º ano. Quais das figuras abaixo são paralelogramos? Assinale-as com um P. Quais são trapézios? Assinale-as com um T.

F. 5.º ano. Leia os denominadores das frações:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{6}{7} \quad \frac{11}{12}$$

Diga algumas frações cujo numerador seja 5.
Diga algumas frações cujo denominador seja 5.

G. 5.º ano. NÚMEROS PRIMOS. Leia os números seguintes, dizendo à enunciação de cada um se é primo ou não. Quando achar que não é primo, diga por que.

10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

H. 5.º ano. RECÍPROCA. Dê as recíprocas de:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{7}{8} \quad 2 \quad 3$$

$$4 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{11}{8} \quad 1\frac{1}{4} \quad 3\frac{1}{2} \quad 2\frac{3}{4}$$

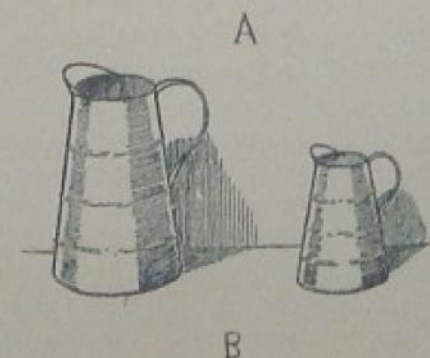
Trabalhos da natureza dos acima expostos, revelam claramente ao mestre o que o aluno assimilou, os pontos em que ainda

está fraco e aqueles que não compreendeu de todo, e são fáceis de classificar. Ao aluno mostram, também, claramente, se acertou ou errou e impedem-nos de pretextar "Eu sabia, mas não soube explicar".

TEMAS PARA DISCUSSÃO

1. Que fatos da vida escolar e objetos de uso escolar podem ser aproveitados, incidentalmente, no ensino dos números, no 1.º ano?

2. Quais serão as ilustrações mais convenientes para concretizar a idéia de galão e quart, A ou B? Haverá outras melhores?

1 galão — 1 quart — Meio pint ou copo cheio — Esta medida de 1 galão contém 1 quart de água — Esta medida de 1 quart contém 1 copo ou meio pint

3. Sob que aspecto, as moedas de brinquedo feitas de simples quadrados de tamanhos diversos, marcados com 1¢, 5¢, 10¢, 24¢, e 50¢ são, como meio de objetivação, inferiores às

peças circulares, reprodução muito parecida da moeda corrente? Sob que aspectos são superiores?

4. Que aplicação ou aplicações se poderia fazer do que se enumera abaixo, no ensino dos números, operações, medidas ou fatos geométricos?

Altura dos alunos.
Tampo da mesa do professor.
Soalho.
Espessura da fôlha de um livro.
Alfinetes.
Relógio.
Filas de carteiras.

5. Fazer uma lista de diferentes casos em cujo aprendizado se torne útil uma régua graduada em polegadas.

6. Examinar a maneira por que são ensinados os conceitos de libra e tonelada (I, 114, Ex. 1-8), pecks e bushels (I, 117, Exs. 1 e 2), e os números de cinco algarismos (I, 150, Exs. 1-10). Procurar ilustrações e perguntas adicionais de que se possa lançar mão em caso de necessidade.

7. Que exemplos se utilizaram (III, 283 e 284) para dar a idéia de quantidades e números negativos? Pensar em outros igualmente aplicáveis ao caso.

8. Ver a explicação de hipoteca (III, 161). Se importasse que todos os alunos conhecessem a significação de hipoteca, que meios empregaria o leitor para ensinar-lha? (Comparar as explicações sôbre cheques [II, 182, 183] e comissões [II, 200]).

9. Ensinaria o leitor a significação de "recíproca" por meio de figuras e exemplos, como ensinamos a das medidas de capacidade e dos números negativos, ou imediatamente nos próprios casos, como procedemos com respeito à raiz quadrada? (Ver II, 52, 53 e 54, se necessário). Por que?

10. Examinar a maneira por que ensinamos a significação de títulos (III, 153 e 154). Por que será melhor ensiná-la assim, do que por meio de uma visita à bôlsa? Sob que aspecto é o certificado de título da página 153 melhor do que um certificado regular?

CAPÍTULO VII

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

REQUISITOS NECESSÁRIOS À ORGANIZAÇÃO DOS PROBLEMAS DE ARITMÉTICA

Os mestres do passado contentavam-se muitíssimas vezes com apresentar qualquer problema contanto que fôsse problema. Supunham que a disciplina adquirida pela mente na tentativa de descobrir a solução de qualquer problema que exija reflexão, é tão valiosa, que não importa seja o problema real ou fictício, mal ou bem enunciado, comum ou raro. Assim agindo, tinham, até certo ponto, justificativa ou pelo menos excusa, pois não há negar a resolução de problemas de aritmética constitue, por si só, um dos melhores testes de inteligência que até hoje os psicologistas conseguiram descobrir; um problema de aritmética pode constituir um bom exercício para a inteligência, ainda quando os seus dados sejam estranhos ou mesmo contrários à experiência.

Entretanto, parece que, se nos dermos a algum trabalho e tivermos algum engenho, não será difícil encontrar grande cópia de problemas que, ao mesmo tempo que exercitem convenientemente as aptidões mentais, contribuam para preparar a criança de modo mais completo e direto para as necessidades da vida. Os novos métodos, como fizemos notar no capítulo I, estabelecem um padrão mais elevado para a escolha de problemas. Todo problema deve, de preferência, (1) versar sôbre situações que apresentem toda a probabilidade de ocorrer muitas vezes na vida real; (2) tratá-las do modo por que o seriam na vida prática; (3) apresentá-las sob uma feição nem muito mais difícil, nem

muito mais fácil de entender do que o seriam se a própria realidade as apresentasse aos sentidos do aluno; (4) despertar, de certo modo, o mesmo grau de interêsse que acompanha a resolução dos problemas que se lhe deparam no curso real de suas ocupações. Admite-se, no entanto, certo afastamento dêsses padrões, afim de poder adaptar os problemas às contingências da classe. São *desiderata,* não exigências.

SITUAÇÕES PRESENTES, SITUAÇÕES IMAGINADAS PELO ALUNO E SITUAÇÕES ENUNCIADAS POR OUTREM

Uma limitação importante que as contingências do ensino impõem aos problemas é que os fatos de que tratam mui raras vezes podem estar presentes aos sentidos — precisam, com freqüência, restringir-se a meras descrições. Os problemas da vida giram, na maioria dos casos, em tôrno de situações ou fatos de existência real, presentes aos olhos do indivíduo; em alguns, em tôrno de questões que a pessoa põe para si mesma, em relação com necessidades passadas ou planos de futuro; em poucos, em tôrno de questões propostas por outrem. Na proporção em que lograrmos fugir a essas limitações, apresentando, efetivamente, a situação enunciada, não só estaremos mais seguros de preparar para a vida, como mais fàcilmente conseguiremos ensinar os alunos a obter soluções corretas.

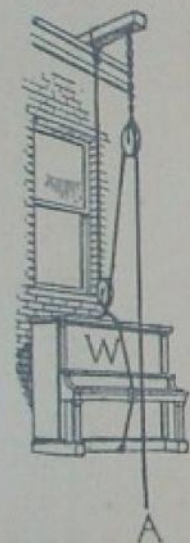
Há três elementos principais a considerar na solução de um problema: (1) a compreensão exata da questão, (2) o conhecimento dos fatos que se devem utilizar para solucioná-la, (3) o uso dêsses fatos em corretas relações aritméticas.

Quando as situações reais estão presentes e, por assim dizer, definem a questão, parece não existir dificuldade com respeito à primeira das três condições acima e, relativamente pouca, em relação às outras duas. Quando os alunos estão brincando de "armazém" com gêneros e dinheiro, ou empenhados no arranjo do jardim da escola ou em construir o campo de "baseball" ou discutindo sôbre a vitória de um partido ou os resultados de uma corrida em distância, estão, em regra, aprendendo, sem grande dificuldade, a usar eficientemente a sua inteligência. Multiplicam e remultiplicam números não apenas, porque aconteça ser um muito grande e o outro muito pequeno, e somam números e números, não sòmente porque aconteça aparecerem três juntos. As situações reais auxiliam a tornar claro o problema e impedem que os alunos cometam muitas tolices.

Quando o aluno se propõe uma questão em conexão com experiências passadas, ou planeja para o presente ou para o futuro (por exemplo, quando faz cálculos sôbre o que vai necessitar para tomar parte em uma excursão ou durante quanto tempo terá de economizar, regularmente, para obter a soma indispensável à adquisição de certo objeto, para cuja compra conta já com certa quantia) é possível que o seu processo de raciocínio não seja tão fàcilmente estimulado e guiado, como quando a situação lhe está ferindo os sentidos; mas será, provàvelmente, muito mais ativo e pronto para correção, do que se o problema fôsse para êle formulado por outra pessoa.

Muitas das dificuldades que os alunos sentem em aprender e os professores em ensinar a resolver problemas, são devidas ao uso dos problemas apresentados em palavras divorciadas de situações reais. As tarefas isoladas, impostas artificialmente, oferecem muito menor probabilidade de predispor o aluno a interessar-se pelo problema e pela sua solução. As dificuldades que obrigam a vencer são, até certo ponto, de valor negativo, visto que na vida, a questão é, em geral, formulada pelo próprio interessado, e o problema se apresenta numa situação total, num conjunto de circunstâncias que o ajudam e guiam na solução. Porisso os problemas impostos pela vida são mais fáceis que os problemas impostos pelos livros.

De posse dessas verdades irretorquíveis, os novos métodos procuram (1) oferecer situações reais ou projetos de onde surjam naturalmente os problemas e (2) estimular o aluno a identificar-se com a pessoa que o problema apresenta em ação ou a planejar. E, onde é de todo impossível oportunizar uma situação real e conseguir despertar o senso de participação pessoal, os novos métodos, ao menos (3) expurgam os problemas de dificuldades (a) de vocabulário e de construção (b) ou resultantes da falta de experiência dos alunos relativamente aos fatos enunciados. São exemplos de problemas sugeridos por situações objetivas, como o seriam na realidade (ou muito apro-

ximadamente), as questões sôbre fôrça e espaço e engrenagens (para meninos do 8.º ano), que estampamos abaixo. São exemplos de problemas organizados com o fim de levar os alunos a se identificarem com as pessoas e situações neles descritas os problemas sôbre "Uma excursão de férias" (comêço do 6.º ano) (v. págs. 158 e 159) e "Inicio de negócio" (meados do 7.º ano) (v. págs 159 e 160).

Fôrça e espaço

1. Se um homem puxar a corda *A* 6 pés para baixo, a que altura subirá o pêso *W*?

2. A que altura subirá o pêso (a) se *A* fôr puxada 20 pés para o solo? (b) Se *A* fôr puxada 14 pés?

3. Quanto se deve puxar a corda *A* (a) para suspender o pêso *W* a 6 pés? (b) Para suspendê-lo a 8 pés?

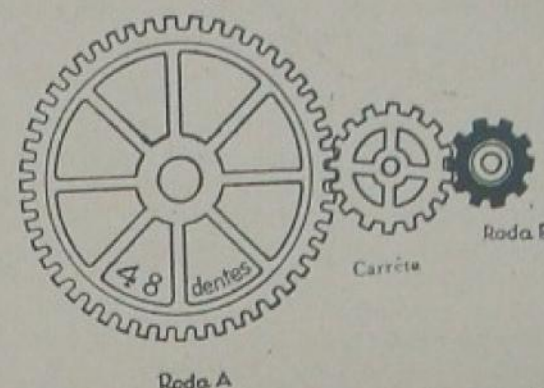
Excluindo o atrito, uma fôrça de 1 lb. que atue na extremidade de uma corda, através de 1 pé, levantará 2 lbs. a meio pé de altura ou 10 lbs. a um décimo de pé etc.

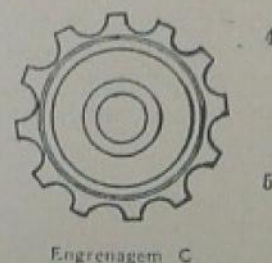
4. Excluindo o atrito, a que altura deve atuar uma fôrça de 100 lbs. (a) para levantar um pêso de 500 lbs. a 2 pés? (b) Para levantar 500 lbs. a $3\frac{1}{2}$ pés? (c) Para levantar 400 lbs. a 4 pés?

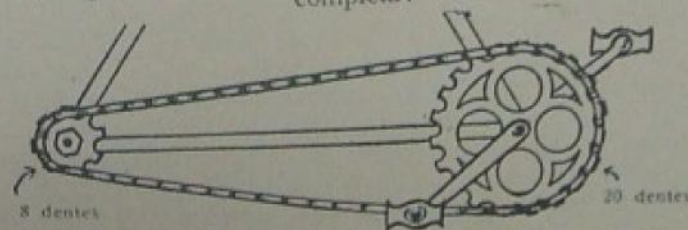
Engrenagens

1. Quantos dentes há na roda *A*? No carrête? Na roda *B*? Lembre-se dos números, pois terá de aplicá-los aos problemas 2, 3 e 7.

2. Enquanto a roda *A* faz uma rotação completa, quantas voltas fará o carrête 2, $2\frac{1}{2}$ ou 3?

Roda A

3. Enquanto o carrête faz uma rotação completa, quantas rotações faz a roda *B* — uma, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{5}$ ou $1\frac{3}{4}$?

Engrenagem C

4. A roda *C* tem 12 dentes. Quantos dentes deve ter uma roda para adaptar-se a *C*, de modo a fazer uma rotação, enquanto *C* faz 8?

5. Quantas revoluções faz a roda traseira da bicicleta abaixo, enquanto a dianteira faz uma revolução completa?

6. Se a roda traseira tiver 28 polegadas de diâmetro, a que distância pode ir a bicicleta, a cada rotação da dianteira?

7. Se a roda *A* do desenho da página precedente fizer 100 R. P. M. (revoluções por minuto), quantas R. P. M. fará a roda *B*?

Uma excursão de férias

O senhor e a senhora Sears, com Ruth e Alec, vão passar as férias no campo. Levam num carro uma barraca, cobertores, alimentos e um fogãozinho. Ruth e Alec vão de bicicleta.

1. Rodam para o norte, durante 2 semanas e 2 dias e gastam 1 semana e 6 dias no regresso. Quanto tempo durou toda a excursão?

2. O senhor e a senhora Sears percorrem 438,9 milhas em 25 dias. Quantas milhas em média por dia?

3. Os filhos percorrem maior distância, porque vão a diferentes lugares com mensagens e se desviam em pequenas excursões. O ciclômetro de Ruth marcava 586,7, à partida e exatamente 1175 à volta. O de Alec marcava 738,46 à partida e 1341,24 à volta. Quanto andou cada um?

4. O senhor Sears ajeitou um velho ciclômetro de bicicleta ao seu carro. Experimentando-o, viram que quando marcava 1 milha, o carro tinha, de fato, andado 2,09 milhas. Quando marcava 2 milhas, de fato, havia o carro percorrido 4,18 milhas. Que distância havia sido percorrida, na realidade, quando marcava 6,4 milhas?

5. Quanto devia marcar o ciclômetro, depois de terem percorrido 438,9 milhas?

6. O snr. Sears pagou $100 por um cavalo, $12 pelos arreios e $48 pelo carro. Ao fim da excursão, vendeu tudo por $125. Por quanto lhe saiu o uso dos mesmos?

7. A barraca e o fogão custaram $21.00. Se durarem 12 anos e a snra. Sears os usar em todos os veraneios, qual será o custo anual do uso da barraca e do fogão? (custo anual quer dizer custo por ano).

8. Em rancho para a viagem gastaram $16.82 e mais $21.46 pelo caminho. (a) Qual foi o custo total dos alimentos para os 29 dias? (b) Qual a média da despesa diária?

9. Alguns concertos no carro custaram $1.45. Aveia e feno para o cavalo, $9.28. Qual a média da despesa diária em reparos do carro e na alimentação do animal?

10. A familia Sears, a começar de 1.º de janeiro de cada ano, trata sempre ganhar algum dinheiro especialmente destinado às férias. Em média, fazem $83\frac{1}{3}$ cents por dia, nos meses de janeiro, fevereiro, março e abril. Quanto acumulam ao todo para as férias, nos quatro primeiros meses?

11. O snr. Sears esforça-se por contribuir com $62.50, a snra. Sears, com $25.00, e cada um dos filhos, com $6.25. Com que fração dos $100 esforça-se por contribuir, para as despesas das férias, cada membro da família?

12. Ruth ganhou — $7.50. Alex — $4.50. Quantas vezes ganhou Ruth mais do que Alec, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$ ou $1\frac{3}{4}$?

13. No ano anterior, Ruth ganhara $3.00 e Alec $7.50. Quantas vezes mais do que Ruth ganhara Alec?

14. Escreva para a classe três problemas sôbre uma excursão de férias.

Início de negócio

1. Ricardo estudou em uma aula noturna da A. C. M. e tirou a caderneta de "chauffeur". Trabalhou em uma garage durante 6 meses, a $5 por semana; 6 meses, a $7 por semana; 6 meses, a $8 por semana, e 6 meses, a $9 por semana. Economizou um têrço do ganho total. Quanto economizou?

2. Tomou dinheiro de empréstimo e gastou $75 com uma garage, $375 com um automóvel de segunda mão e $10 com ferramenta, cobertas, etc. (a) Quanto tomou emprestado? (b) A 6 % de juros anuais, quanto terá de pagar por ano, até liquidar a sua conta?

3. Ricardo calcula que no primeiro ano poderá pagar $27.50 de seguro da garage e do auto, poderá apartar $100.00 para um fundo de reserva destinado à compra de novo auto, para o caso de inutilização do primeiro, e poderá empregar $112.00 no pagamento de juros e amortização da divida contraída (amortizar

uma dívida é pagá-la aos poucos). Que lucro terá, se realizar os seus projetos, supondo-se que faça $920.00 e gaste $115.00 em gasolina, óleo, acessórios e concertos?

Tabela de preços de Ricardo

Preços de corridas por passageiro:

	Até 1 milha	Extra por ¼ de milha
1 passageiro	30¢	5¢
2 passageiros	40¢	6¢
3 ou 4 passageiros	50¢	7 ½¢

4. Quanto cobrará Ricardo de 2 passageiros, por uma excursão, se ao tomarem o carro o velocímetro marcar 110,2 milhas e ao deixá-lo, 113,7 milhas?

5. Quanto receberá de 3 passageiros, por uma viagem, se o velocímetro marcar 116,3 milhas à partida e 118 à chegada?

(0,6 milhas ou 0,7 milhas contam-se como $\frac{3}{4}$ de milha).

6. Quanto cobrará de 4 passageiros, por uma excursão, estando o velocímetro a 149,4 milhas à saída e 151,9 à chegada?

7. Por uma viagem de 12 milhas, com um só passageiro, Ricardo recebeu o preço fixo, menos 30 %. Quanto lhe pagou o passageiro?

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

PROBLEMAS TORNADOS INDEVIDAMENTE FÁCEIS PELO ENUNCIADO

Sob três aspectos, eram os problemas, tais como ordinàriamente se davam, mais fáceis de resolver do que os correspondentes reais. Primeiro, porque se fez hábito não dar no

problema senão os números indispensáveis à sua solução, de modo que o aluno sabia que tinha de jogar com êles, fôsse como fôsse, o que não ocorre, na vida, pois as situações reais podem conter muitos números inaplicáveis, sem importância para a solução, números que devem mesmo ser desprezados. Segundo, porque se fez hábito dar (exceto em caso de redução de complexos, como 12 pol. = 1 pé, 1 gal. = 4 qts.), em cada problema, todos os números necessários à sua solução de modo que o aluno que resolvia o problema x à página y, não precisava olhar para nenhum outro ponto que não fôssem as duas ou três linhas impressas que o continham, embora na vida êsse problema possa obrigar à consulta de tabelas de preços, exigir que se relembrem as instruções maternas ou que se interrogue o vendedor. Terceiro, porque certos enunciados eram tão uniformemente associados a certos processos (v. g. "comprou ... a ...", com a multiplicação), que a reação correta se fazia por automatismo. Tal orientação não é aconselhável, e os novos métodos tratam de modificá-la. Em vez de colocar em cada problema todos os dados indispensáveis à sua solução e sòmente os indispensáveis, muitas vezes, expõem destacadamente, certos dados, seguidos de um grupo de problemas, cada um dos quais requer apenas o uso de alguns, como se vê às págs. 162, 163, 164 e 165; dão problemas que exigem do aluno a procura de dados (como "Quantos pés quadrados tem o soalho de nossa classe?"); e exigem que, de quando em quando, busque resultados obtidos em problemas precedentes do mesmo grupo, para aplicar a novo problema. Tomam especial cuidado em enunciar os problemas nas mais variadas formas em que a vida possa apresentá-los. Assim, tanto empregam "comprou 30 limões a 20¢ a dúzia" como "comprou 4 limões a 2¢ cada um" como "comprou 6 dúzias de limões a 20¢ a dúzia".

(Para o 2.º ano ou início do 3.º)

LOJA NADA ALÉM DE 9¢

Objetos de vários preços para meninos e meninas.

Um cartão postal	1¢
Uma boneca de papel	2¢
Uma dúzia de bolinhas	3¢
Um pião	4¢
Uma bola	5¢
Um bloco	6¢
Um revólver	7¢
Um dominó	8¢
Um livro	9¢

Quanto se deve pagar por:

1. Uma bola e um bloco?

2. Uma bola e um revólver?

(Seguem oito problemas).

1. Faz de conta que você tem 8 centavos e deseja comprar dois objetos na loja "Nada além de 9 centavos". Pode comprar um bloco e... ou uma bola e... ou dois piões.

2. Que poderia você comprar se tivesse 9 centavos para gastar em dois objetos?

Corrida a pé

Todos os meninos e meninas de uma classe da Escola Lincoln exercitavam-se na corrida de 50 jardas, procurando fazê-lo no menor tempo possível. O professor marcava os tempos com um cronômetro. Eis aqui alguns dos tempos obtidos (em segundos):

Rapazes		*Meninas*	
Alfredo	$10\frac{1}{5}$	Alice	$10\frac{2}{5}$
Artur	$8\frac{3}{5}$	Clara	$9\frac{1}{5}$
Benjamin	$8\frac{2}{5}$	Ella	$11\frac{3}{5}$
Carlos	$7\frac{4}{5}$	Catarina	$8\frac{4}{5}$
Ricardo	9	Helena	$14\frac{1}{5}$

1. Qual dos rapazes fez o melhor tempo? Qual o seguinte? Qual a diferença entre os tempos dos dois primeiros?

2. Quantos segundos abaixo de dez está o tempo de Artur? O de Benjamin? O de Carlos? O de Ricardo? O de Clara? O de Catarinha?

3. Quanto excedeu de 10 segundos o tempo de Alfredo? E o de Alice? O de Ella? O de Helena?

Dos 12 anos e 0 meses aos 13 anos e 0 meses

Ricardo aumentou	$\frac{3}{8}$	poleg.
Frederico "	$\frac{5}{8}$	"

Preencha as lacunas:

4. Jorge cresceu ... vezes mais que Ricardo.

5. Oscar cresceu ... vezes mais que Ricardo.

Jorge	"	$1\frac{3}{4}$	"
Oscar	"	$1\frac{1}{8}$	"
Paulo	"	$1\frac{1}{4}$	"
Roberto	"	$1\frac{1}{2}$	"
Samuel	"	$2\frac{1}{2}$	"

6. Roberto cresceu . . . vezes mais que Ricardo.

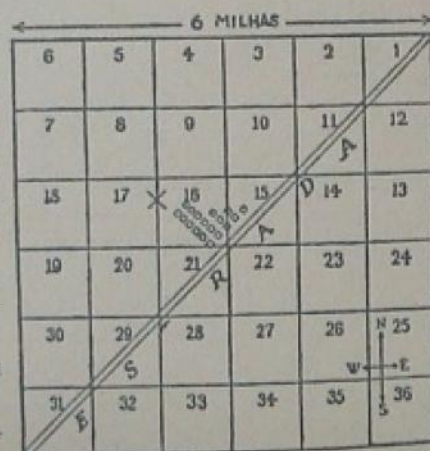
1. Examine o mapa ao lado. E' o mapa de um município. Os números indicam as secções em que se acha dividido o município, isto é, os distritos. Considere o município como um quadrado e os distritos como quadradinhos.

2. Quantas milhas quadradas há no município?

3. Quantas geiras tem um quarto de distrito?

4. Que fração de distrito são 8 geiras?

6 MILHAS

6	5	4	3	2	1
7	8	9	10	11	12
18	17	16	15	14	13
19	20	21	22	23	24
30	29	28	27	26	25
31	32	33	34	35	36

5. Veja quanto tempo leva cada um dos trens ao lado, para ir (a) de Chicago a Marion; (b) de Chicago a Omaha.

6. Qual dos trens leva cêrca de 40% de tempo mais do que o S. Francisco Limitada?

7. A que horas chegaria o Expresso de Missouri River a Omaha, se estivesse com 1 h. e 16 min. de atraso e recuperasse $\frac{3}{4}$ do tempo perdido?

	Expresso de Missouri River	São Francisco Limitada	Expresso local
Chicago ..	**6.05**	**9.35**	**10.00**
Dan. Jct.	**8.14**	**11.32**	12.30
Marion ..	**11.50**	3.10	5.30
Pickering	1.30	....	7.35
Omaha . .	7.19	10.10	**3.25**

Os números em tipos mais escuros incidam horas P. M., os mais claros, horas A. M.

Em oposição ao primeiro hábito citado, alguns professores iriam mais longe, incluindo números desnecessários nos problemas. Organizariam problemas como "Fui a 4 lojas e comprei 9 blocos de papel a 7¢ cada um. Cada bloco tinha 50 fôlhas. Quanto me custou o papel?" ou "Fui com 3 amigos a uma feira que começava às 10.25 e terminava às 1.10. Gastamos $2.35 cada um. Quanto gastámos ao todo?"

Entretanto, não nos parece prudente o uso de tais problemas, a menos que sejam dados freqüentemente ou com a advertência de que vão intercalados entre os outros. E' difícil inventar situações em que surjam, naturalmente, números desnecessários à solução. E o fato do aluno sentir que o professor ou o compêndio procura apanhá-lo desavisado para experimentá-lo, é, em geral, prejudicial a qualquer trabalho. Assim, a não ser que êsses números apareçam em situações reais (*) ou

(*) Um exemplo dêsses números inaplicáveis que surgem com tanta freqüência nas situações naturais, é o seguinte, onde os descontos propostos e a extensão dos retalhos figurantes no anúncio, não seriam usados no cálculo do custo.

Compra de retalhos

Retalhos a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ do custo real.

Comprimentos de $\frac{1}{2}$ a 5 jds.

Riscados, 8¢ a jd. Sarjas, 16¢ a jd. Flanelas, 24¢ a jd.

1. A snra. Andrews comprou dois retalhos de riscado, um de 2 jds. e $\frac{3}{8}$ e outro de 1 jd. e $\frac{3}{4}$. Quantas jardas comprou ao todo? Quanto custou o riscado ao todo? Que trôco deveria receber de uma nota de dois dólares?

2. A snra. Johnson comprou três peças de flanela, uma de $1\frac{1}{8}$ jd., a segunda de $1\frac{1}{2}$ jd., a terceira de $1\frac{5}{8}$ jd. Quantas jardas comprou ao todo? Quanto custou a flanela? Que trôco deveria receber de uma nota de dous dólares?

em exercícios especiais precedidos do aviso de que estejam alerta para não se deixarem "apanhar", parece melhor aceitar a convenção de que um problema isolado não deve conter números extra e desnecessários. Por exemplo, melhor andariam os professores acima referidos. fundindo em um só problema a história toda das compras, escrevendo-o no quadro negro e, a seguir, um grupo de perguntas, como:

1. Quanto custaram os 9 maços?
2. Quantas fôlhas continham?
3. A que horas se encerrava a feira?
4. Quanto gastamos ao todo, na feira, eu e meus amigos?

Certas "armadilhas" inocentes (por exemplo, "O trem n.º 20 percorre 30 milhas por hora. Andando durante 6 horas, que distância percorrerá?") podem, talvez, ser úteis, servindo para denunciar os alunos que costumam resolver os problemas por palpite, por mera baralhação dos termos ou envergonhar os mais descuidados. Entretanto, existem muito melhores trilhas para alcançar o mesmo fim:

A TÉCNICA DE RESOLVER PROBLEMAS

Relativamente à técnica de resolver problemas e formular a solução, os novos métodos defendem extrema generalidade.

Até o 5.º ano, aconselham voltar a atenção do aluno quasi exclusivamente para a obtenção da resposta e, só raramente, levá-lo a expor o que pensa fazer, antes de fazê-lo, ou porque o fez, depois de tê-lo feito. Consideram de bom aviso formular de vez em quando, problemas sem números (como, "Si se soubesse quantas horas um auto rodou e que distância percorreu, que se deveria fazer para saber com que velocidade andou?") que forcem o aluno pensar no método a empregar para resolvê-los e na maneira de expressá-los verbalmente.

Só no 5.º ou 6.º ano, iniciam o aluno na técnica de resolver problemas, começando por dar-lhe algumas normas muito simples:

(1) Se tem a certeza de que sabe resolver o problema, resolva-o imediatamente.

(2) Se não tem, considere a questão, os dados e o que poderá fazer com êles, perguntando a si mesmo:

Que é que se quer saber neste problema? Que tenho de procurar?

De que dados disponho para achar a solução? Que sei a respeito dêles?

Que devo fazer com êles? Que poderei fazer com os números e com o que sei a respeito dêles?

(3) Pense no que vai fazer e porque vai fazê-lo assim e indique as operações de modo a saber o que fez.

(4) Tire a prova dos resultados: veja se são razoáveis, se estão de acôrdo com o que diz o problema.

Nesta altura, ensinam a armar equações que mostrem ao aluno o que tem de fazer, e o exercitam nesta espécie de trabalho. Entretanto, nem essa nem outra qualquer forma escrita de análise exigem obrigatòriamente.

No 7.º ou no 8.º ano, conduzem o aluno a indicar a solução de problemas típicos e familiares, sob uma forma generalizada, com termos diversos ou símbolos mais econômicos ou uma e outra coisa, em questões como:

Seja y = o número de milhas que um trem percorre em uma hora.

d = a distância percorrida (em milhas).

t = o total do tempo (em horas) que esteve em movimento para percorrer essa distância.

1. Qual o valor de y (a) sendo $d = 200$ e $t = 5$? (b) sendo $d = 270$ e $t = 9$? (c) sendo $d = 105$ e $t = 3$?

2. Quais das igualdades abaixo estão certas?

$y = d \times t$ $\quad y = d + t$ $\quad y = d \div t$ $\quad y = d - t$

$y = \dfrac{d}{t}$ $\quad y = 2d + 3t$ $\quad y \times d = t$ $\quad t \div y = d$

$d \div y = t$ $\quad \dfrac{d}{y} = t$ $\quad y \times t = d$

3. Indique a regra "A área de um triângulo $= (\frac{1}{2}$ da altura) $\times$ (base), sob a forma de uma equação em que

x represente a área do triângulo em polegadas quadradas.
a represente a altura do triângulo em polegadas.
b represente a base do triângulo em polegadas.

4. Preencha as lacunas e ponha em equação a regra:

Juros = Capital × Taxa × Tempo

"Capital" significa o número de dólares tomados de empréstimo.

Seja j = o número de dólares pagos de juros
c = ...
i = ...
t = ...

5. Qual será o valor de j, se $c = \$200$, $i = 6\%$ ou 0,06, e $t = 3$ anos?

Exercício escrito

Seja s = o salário regular semanal (em dólares) de um vendedor.
c = a taxa de comissão sôbre as vendas.
t = o total (em dólares) das vendas de um ano.
g = o ganho total (em dólares) de um ano.

1. Escreva uma equação para usar na avaliação de g.
2. Quanto valerá g, se $s = 12$, $c = 7\frac{1}{2}\%$ e $t = 8950$?
3. Quanto valerá g, se $s = 15$, $c = 10\frac{1}{2}\%$ e $t = 12.740$?

4. Em quanto importará c, se $g = 1156$, $s = 10$ e $t = 10.600$?

Êste é um exercício valioso, mas bastante difícil para grande parte dos alunos, porisso os novos métodos julgam preferível introduzi-lo por meio de equações armadas com palavras e falta de um elemento, como se vê abaixo. Aos alunos dos anos mais adiantados pedem, de tempos a tempos, a exposição e justificação completa de algumas soluções, quer como exercício de aritmética, quer, mais pròpriamente, como exercício de linguagem.

Todavia, as explanações orais ou escritas, sôbre o que se tem de fazer, o que foi feito ou que deveria ser feito teem, comparativamente, menor importância do que resolver cuidadosa e ràpidamente o problema. Exposições, análises e explicações de alunos valem, principalmente, na proporção em que facilitam a solução. Valem, também, como treino de linguagem. Não se justifica, porém o seu emprêgo, quando tomam muito tempo e interferem no raciocínio, o que sucede freqüentemente.

Preencha com as palavras ou os sinais convenientes as equações abaixo.

Se não houver redução de preço em compras feitas em grande quatidade,

1. O custo do quart = (preço de um bushel) ÷ ...
2. O custo do quart = (preço total) ... (número de quarts).
3. O custo do quart = $\dfrac{\text{preço de...}}{8}$
4. O custo de 20 unidades = 20 ... (preço de uma unidade).
5. O custo de 8 unidades = 8 ... (preço de uma unidade).
Se representarmos por n o número de unidades compradas,
6. O custo de n unidades = n ... (... ... unidades).
A área do retângulo = $c \times l$.
7. Área em polegadas quadr. = (compr. em pol.) × (...).
8. Perímetro em polegadas = (2 × compr. em plgs.) ... (2 × larg. em polgs.).

Perímetro = soma dos comprimentos dos quatro lados.
A área do paralelogramo = $b \times a$.

9. Área em polegadas quadradas = (base em polegs.) ... (alt. em polegs.)
10. Perímetro = ... dos comprimentos dos ...

Triângulo

11. Área em polegs. quadr. = (base em polegadas) ... ½ (... em polegadas).
12. Perímetro = soma de ... de ... ...
13. Distância em milhas = (tempo em horas) .... (milhas por horas).
14. Tempo em horas = (distância percorrida em milhas) ... (milhas por hora).

    Quando se calcula com horas, minutos e segundos e milhas, rods, jardas e pés, é bom não esquecer que

15. Distância = tempo ... velocidade.
16. Tempo = distância ... velocidade.
17. Velocidade = distância ... tempo.

Alguns professores defendem tais maneiras de indicar fórmulas e operações, como meio de verificar se o aluno compreende o que faz ou se trabalha por mero automatismo. A nós nos parece, entretanto, que um teste bem organizado, constante de problemas análogos aos aprendidos, alterados apenas na aparência, podem prestar, neste mesmo terreno, mais assinalados serviços, pois que um aluno pode haver entendido um problema, saber resolvê-lo e ficar embaraçado ante a tarefa lingüística de expor a solução. Pelo menos, em dezenove por vinte problemas, a tarefa do aluno deve consistir, simplesmente, em procurar as respostas.

DIFERENÇAS INDIVIDUAIS

O programa de cada ano escolar compreende o aprendizado de certos cálculos e a aplicação dêsses cálculos a problemas. Os primeiros são susceptíveis de ser aprendidos e feitos por todos os alunos promovidos, embora exijam alguns muito mais tempo para dominá-los e fazê-los do que outros. Com a solução de

problemas não se dá o mesmo. Se propusermos a um número elevado de alunos, digamos mil alunos do 6.° ano, uma centena de problemas graduados em dificuldades de uma a dez, para cada passo, alguns (salvo um ou outro cochilo) resolverão os cem, outros não resolverão mais de cincoenta, ainda que se esforcem por centenas de horas. Estes, simplemente, não podem resolver problemas de certo grau de complexidade e abstração, exatamente pela mesma razão por que não podem saltar por sôbre uma cêrca de cinco pés de altura ou erguer um pêso de quinhentas libras. Diferenças menores, mas igualmente notáveis, vão dos menos capazes para os mais capazes do grupo. Os problemas acessíveis, aproximadamente, à maioria da classe deixam ociosos os mais fortes; e aqueles que põem a estes em atividade, constituem verdadeiros enigmas para os mais fracos.

São estes fatos, em geral reconhecidos, ainda que empiricamente, pelos compêndios e pelos bons mestres. Quasi todos os compêndios apresentam, em cada lição, grupos de problemas de dificuldades variadas, dos quais o bom mestre, certamente não espera que os alunos mais tardos possam acertar muitos.

Convém examinar o fato mais aberta e honestamente, em lições especialmente preparadas para atender a essas diferenças.

Ganhos, gastos e economias

Cada aluno deve escrever no quadro negro dois problemas sôbre ganhos, gastos e economias, um difícil e outro fácil. Os colegas devem resolver ou um ou ambos, à escolha. Se achar que pode resolver o difícil, experimente. Se o julga demasiado difícil, resolva o mais fácil. Se tiver tempo, resolva ambos.

TEMAS PARA DISCUSSÃO

Examine o leitor os problemas apresentados às páginas 166, 168, 172, 174, 183, 195, 197, 204, 220, 221, I.

1. Faça uma lista de dez dentre êles cujos dados estejam presentes aos sentidos do aluno tão aproximada ou completamente quanto estariam em problemas correspondentes da vida real.

2. Faça uma lista de dez que julgue capazes de levar o aluno a identificar-se tão intimamente com as pessoas mencio-

nadas, como se enunciassem fatos de sua própria experiência ou por êle planejados.

3. Poderia achar mais de dez da mesma espécie?

4. Quando se procura a área de um campo triangular real em que consistirá a dificuldade maior, em lembrar que se obtém a área pela fórmula $\frac{1}{2}$ (alt. × base) ou em saber o que significa altura e como determiná-la e empregar a altura e o lado convenientes?

5. Qual o defeito do problema seguinte? Um campo triangular tem 40 rods de base e 21 rods de altura. Qual é a sua área em rods quadr.?

6. Qual dos dois problemas que seguem, mais se aproxima da realidade? *A* ou *B*? Por que?

A

A 1.° de janeiro de 1920, João entrega ao Banco uma letra no valor de $100, a pagar a 1.° de março de 1920. Que quantia lhe pagará o Banco, $99, $100 ou $101? Se a conservar até 1.° de fevereiro, o Banco lhe pagará mais ou menos por ela?

Quanto deveria pagar João ao Banco, a 1.° de março, se entregasse a letra para desconto, a 1.° de janeiro?

Deveria pagar maior, menor ou igual quantia, em abril, se conservasse a letra até 1.° de fevereiro?

B

Qual o produto líquido de uma letra emitida em janeiro, 1.°, 1920, vencível em março, 1.°, 1920, se fôr descontada em janeiro, 1.° 1920, sendo a taxa de 6 por cento?

Qual o produto líquido, se fôr descontada em fevereiro, 1.°, 1920, à mesma taxa?

Que quantia deverá pagar o emitente ao vencimento da mesma!

7. Estude o leitor os problemas impressos abaixo:

Quais dentre êles exigem experiências de fatos que poucos alunos da escola elementar possuem? Assinale-os com Ex.

Quais dêles concorrem para a formação de idéias falsas? Marque-os com um F.

Quais dêles exigem conhecimento de linguagem acima da capacidade de muitas crianças do ano a que se destinam? Marque-os com um L.

Quais dentre êles nem um por cento dos alunos terão oportunidade de resolver, depois que deixarem a escola? Marque-os com Irr.

(O mesmo problema pode apresentar mais de uma das deficiências enumeradas acima).

a. Uma pilha de madeira de forma cúbica contém 31 cords. Quais as suas dimensões aproximadas em polegadas?

b. Nesta estampa vêem-se dois gatinhos, um no gramado e outro no muro. Se você me perguntasse quantos gatinhos há no muro, qual seria a minha resposta?

c. Qual é o custo de $\frac{6}{7}$ de 42 ovos a 25 centavos a dúzia?

d. A $\frac{5}{8}$ cada um, quantos ovos poderia eu comprar com $60?

e. Três corpos movem-se uniformemente em órbitas semelhantes, ao redor do mesmo centro, em 87, 224 e 365 dias, respectivamente. Supondo-se os três em conjunção a um tempo dado, pergunta-se após quantos dias estarão novamente em conjunção?

f. Aquí vemos um fagote e um violino. Ambos são instrumentos de música. Um instrumento de música e outro instrumento de música quantos instrumentos são?

g. Maria tem 24 galinhas. João tem $\frac{7}{8}$ mais do que ela. Quantas galinhas tem João?

h. Se lhe perguntassem a sua idade, você responderia em meses ou em semanas? Se lhe perguntassem quanto tempo lhe falta ainda para voltar para casa, como responderia?

i. Oito vezes o número de listras da nossa bandeira dá o

número de anos que decorreram de 1800 até aquele em que Roosevelt foi eleito presidente. Em que ano foi eleito Roosevelt?

j. Uma árvore caiu e partiu-se em quatro pedaços de 9 pés e $\frac{3}{8}$, 13 pés e $\frac{2}{9}$, 16 pés e $\frac{11}{18}$ e 14 pés e $\frac{1}{2}$ de comprimento, respectivamente. Qual era a altura da árvore?

k. O som percorre 1.100 pés por segundo. Quanto tempo depois de se haver disparado um canhão em Nova-York, será ouvido o tiro em Filadélfia, que se acha a 90 milhas de Nova-York?

l. Um pescador apanhou 968 peixes. Um oitavo era de eglefins e o resto de bacalhau. Quantos bacalhaus foram apanhados?

m. Quanto correrá em 10 horas um cavalo que corre 9 milhas por hora?

n. Qual será a dívida, a 20 % *ad valorem*, de 40 fardos de merinó de lã, cujo custo é de 25¢ a libra, pesando cada fardo 400 lbs. e sendo o desconto pela tara de 5 por cento?

o. George Washington nasceu a 22 de fevereiro de 1732. Que idade teria se houvesse vivido até 22 de fevereiro de 1898?

p. O snr. *A* tem 8 cavalos, o que eqüivale a $\frac{7}{31}$ do número de vacas e $\frac{7}{21}$ do número de carneiros que possue. Quantos animais possue êle?

q. Se a pressão atmosférica fôsse de 15 lbs. por polegada quadrada, qual seria a pressão exercida sôbre a mesa do professor?

r. Quantas linhas teria você de traçar para desenhar 8 triângulos e 6 quadrados?

s. Que quantia deverá pagar um corretor por $200 em ouro, ao prêmio de $\frac{5}{8}$%?

t. Um trem tem 7 carros e outro 15. Quantos carros mais do que o primeiro tem o último?

CAPÍTULO VIII

O ENSINO COMO GUIA

Nos capítulos anteriores examinámos os processos gerais de que se valem os novos métodos para adaptar o ensino da aritmética à natureza do educando e às necessidades da vida. Estudámos os princípios cardeais que norteiam a ação do mestre, na escolha dos tópicos e na técnica de captação e aproveitamento do interêsse, que lhe permitem assegurar a compreensão da ciência da aritmética e o desenvolvimento da capacidade de calcular e aplicar o aprendido aos problemas do mundo real, e o orientam na organização do aprendizado em séries de experiências e atividades instrutivas.

Os novos métodos não se satisfazem com atender a princípios gerais. Tratam de aplicá-los, assim como todas as conclusões úteis a que chegaram a experiência do ensino e o estudo científico do processo do aprendizado, a cada pormenor a ensinar. A parte restante dêste livro será consagrada, principalmente, ao estudo dêsses pormenores. Sob o título geral de "O ensino como guia", o presente capítulo apresentará alguns dados e sugestões para solução de vários casos.

Vimos que o ensino da aritmética deve ser ministrado através das experiências mais instrutivas e das mais instrutivas atividades, organizadas e dispostas de modo a proporcionar o máximo de conhecimento da aritmética, como ciência e o máximo de desembaraço na aritmética, como arte. O mestre pode ser comparado a um general que equipa os seus soldados com as melhores armas e munições e os livra de perigos e ciladas, ou a um guia que aparelha a sua gente para as vicissitudes da jornada e a conduz por trilhas seguras, tirando-a de perigos, pre-

venindo-a contra desvios. A função do mestre inclue o conhecimento e aplicação de medidas tendentes a evitar mal-entendidos e passos falsos, de diagnosticar e remover dificuldades, exige capacidade de seleção e invenção dos melhores processos para o aprendizado de cada tópico.

BLOQUEIO DOS MAUS CAMINHOS

Confusão entre cardinais e ordinais. Quasi todas as crianças, com exceção das excessivamente rudes, ao ingressar na escola, trazem já o conhecimento dos números "um", "dois" e "três" e um conceito exato, embora vago, de alguns outros números. Poucos, confundem "dois" com "segundo", "três" com "terceiro", e assim por diante; porém, tratando-se de números mais altos, muitas crianças caem nesse êrro, em virtude de serem as páginas dos livros de leitura numeradas em cardinais e ser costume designá-las por esta forma.

Para prevenir êste êrro deve o professor procurar informar-se se os alunos teem experiência suficiente dos cardinais nas suas aplicações elementares, e ensinar-lhes que o 22 da página 22 quer dizer que até alí há 22 páginas, que o 8 de uma régua quer dizer que, da extremidade da régua àquele ponto, há 8

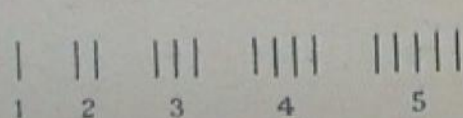
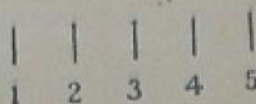



Fig. 11 Fig. 12

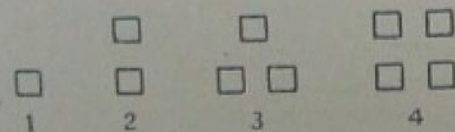
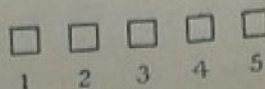



Fig. 13 Fig. 14

polegadas. E ensinar, também, a aplicação de primeiro e segundo; porém não forçar o emprêgo de terceiro, quarto e quinto, que graças à infortunada constituição de nossa língua, se usam

tanto para designar posição em série, como partes fracionárias. (*)

Toda representação objetiva dos cardinais às primeiras noções, deve pôr de relêvo a significação exata dêsses números. Assim, as figuras 11 e 13 são boas; as figuras 12 e 14, erradas ou, ao menos, inadmissíveis.

Somar adicionando as unidades uma a uma. O processo de somar adicionando as unidades uma a uma é vantajoso, quando aplicado à derivação das primeiras combinações de soma e à verificação de resultados, durante o período em que o aluno está empenhado em cometê-las à memória. Para evitar que o processo degenere em hábito, devem-se empregar somas "escondidas" (**) ou exercícios que forcem a velocidade das reações, como enunciar ou mostrar uma combinação e esperar 5 segundos pela resposta, e ir diminuindo o tempo para 3, $2\frac{1}{2}$ até 2 segundos. O mesmo processo é aplicável sob a forma de exercício escrito, que se faz do seguinte modo: Dispõem-se as combinações, em colunas, em papel pautado e entregam-se ao aluno, para que lance, ao lado de cada uma, as respostas de que esteja absolutamente seguro, deixando as demais em brânco. Neste trabalho podem-se, também, aproveitar os alunos mais capazes,

---

(*) Afim de evitar confusão seria bom, nos primeiros anos anteceder o ordinal do artigo definito, "o quarto", "o sexto", etc., em vez de terceiro, quarto, quinto, etc.

(**) "Adição escondida" significa adição em que se apresentam objetos para levar ao entendimento do problema e à verificação do resultado, objetos que se escondem durante o ato de somar, afim de que o aluno, não os podendo *contar*, *pense com números* e os *some*. Por exemplo, o professor diz ao aluno:

Tome 10 centavos. Faça uma pilha de 4 e ponha a mão sôbre ela. Coloque mais dois centavos na pilha. Quantos centavos há debaixo de sua mão? Olhe para ver se acertou.

Coloque 6 centavos em pilha debaixo de sua mão. Junte mais dois centavos. Quantos centavos há debaixo de sua mão? Veja se acertou.

Coloque 3 centavos debaixo de sua mão. Junte mais 2. Quantos centavos há agora, debaixo de sua mão?

incumbindo-os de auxiliar diretamente os que não conseguem alcançar a velocidade de 2 segundos, mínimo requerido. A criança vai lendo os números e enunciando a resposta, se esta não fôr dada imediatamente pelo interrogado, e fazendo-o repetí-la, em seguida, (v. g., 9 e 6, 15), e assim continuando, sem nunca lhe dar tempo de contar, até que se torne capaz de fazê-lo, diretamente por si mesmo.

Um aluno que não contraiu êste mau hábito, no aprendizado das combinações fundamentais, pode ainda cair nele nas adições em que já entram dezenas (12 + 9, 13 + 4, 25 + 8, etc.). Forçar a velocidade é ainda aquí, o preventivo aconselhável.

Subtrair diminuindo as unidades de uma em uma. Jamais se deve permitir, seja em que circunstância fôr, que o aluno subtraia, diminuindo as unidades de uma em uma. Deve-se evitar até mesmo que perceba ser êste um caminho para lá chegar. Logo ao iniciar o aprendizado da subtração, poderá derivar os fatos da subtração, não contando para trás de um em um, mas escolhendo os fatos da adição que se prestem ao caso. Ex. 5 + ... = 8; o aluno pensa em "5 +" um, outro e outro número até chegar o número conveniente. Quando o encontra aprende-o.

Subtrair, adicionando unidades uma a uma, até perfazer a diferença. Neste caso, o preventivo aconselhado é o mesmo indicado para a adição.

Memorização seriada das tabuadas de multiplicar e dividir. Os alunos que aprendiam pelos métodos tradicionais, quando diante de casos como "8 vezes 3 = ?" para achar o resultado exato, tinham, muitas vezes, de começar "uma vez três, duas vezes três", e assim, através de toda a tabuada, até chegar ao fato desejado. Exercícios de velocidade dos moldes descritos para a adição, como os fatos dispostos em ordem fortuita, podem constituir um excelente preventivo, talvez, um preventivo bem adequado. O que parece desaconselhável é começar o aprendizado dos fatos da multiplicação em forma tabular. E' fora de dúvida que o aluno deverá conhecer o sistema, pois se não se lembrar do fato exigido no momento, deve estar apto a

derivá-lo. Poderá, entretanto, fazê-lo mais vantajosamente, buscando-o em sua fonte originária: adições sucessivas, tanto

sob a forma escrita
$$\begin{array}{r} 3\\ 3\\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3\\ 3\\ 3\\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3\\ 3\\ 3\\ 3\\ \hline 12 \end{array}$$
, como na forma verbal 6 (duas vezes 3), 9 (três vezes 3), 12 (quatro vezes 3). As primeiras derivações, todos os fatos da multiplicação deveriam ser aprendidos como associações independentes para, depois de conhecidos os produtos de 2, 3, 4 e 5 serem apresentadas em cálculos como

$$\begin{array}{r} 32\\ 2\\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 43\\ 2\\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 321\\ 4\\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 523\\ 3\\ \hline \end{array}$$

e, após, em trabalhos como

$$\begin{array}{r} 524\\ 7\\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 345\\ 6\\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 232\\ 5\\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 415\\ 9\\ \hline \end{array}$$

Os fatos da divisão não deveriam ser apresentados logo, nas tabuadas, mas derivados dos fatos correspondentes da multiplicação, aprendidos como associações independentes e logo aplicados em divisões com resto e, pouco depois, em divisões de números compostos de três e quatro algarismos por números simples. Em ambos os casos (multiplicação e divisão) é absolutamente inútil parar para repassar uma tabuada ou derivar um produto ou quociente, porque mesmo os alunos mais rudes devem ser levados a conceber a necessidade de dominar os fatos da multiplicação e da divisão.

Soma de denominadores. Quando uma criança diz ou escreve que $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ou que $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{16}$, é levada pelo hábito adquirido na soma de inteiros, de somar tudo quanto está à vista. Nada há de anormal em tal procedimento. Ao contrá-

rio, todos os alunos tenderiam a responder $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ ou $\frac{7}{7}$ ou 14, se uma fôrça contrária não prevenisse tais desvios.

Neste caso, os preventivos indicados são: o conhecimento perfeito da significação das frações consideradas ou aprendizado das combinações $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$ ou 1, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4}$ ou 1, e de outras poucas somas de frações de uso corrente, exatamente como aprendemos $5 + 3 = 8$ ou $7 + 5 = 12$, e a verificação objetiva da adição de frações.

DIAGNÓSTICO DE DIFICULDADES

Para contornar os maus caminhos pelos quais os alunos tendem a enveredar, torna-se necessário, antes de tudo, descobrir os motivos por que se inclinam êles a tomá-los. O meio único de auxiliá-los quando se confundem ou se desorientam e ficam sem saber que fazer, é procurar descobrir porque estão confusos, transviados, perplexos, isto é, diagnosticar as suas dificuldades.

Tomemos para exemplo o terceiro caso da divisão de frações ordinárias, tópico que os alunos costumavam aprender com relativa dificuldade, considerado o tempo que gastavam em dominá-lo. Os velhos métodos, quando chegavam a êste tópico faziam esforços penosos para mostrar aos alunos o seguinte: (1) que, sendo os denominadores das frações *a* e *b* iguais, basta dividir o numerador de *b* pelo numerador de *a*, para achar o resultado; (2) que, sendo os denominadores diferentes devem-se reduzir primeiro ao mesmo denominador e, em seguida, dividir o numerador de *b* pelo numerador de *a*; (3) que, não querendo reduzir as frações ao mesmo denominador, basta multiplicar o numerador de *a* pelo denominador de *b* e o numerador de *b* pelo denominador de *a* e dividir o primeiro resultado pelo segundo; (4) que, se pode chegar ao mesmo resultado invertendo os termos de *b* e multiplicando-o por *a*.

Todas as explicações dêste teor baseavam-se na crença de que a dificuldade provinha da repugnância manifestada pelo aluno em "inverter" a fração e multiplicar, quando se lhe diz que deve dividir; mesmo, sabendo que a resposta dá sempre certa. Seria esta a dificuldade? Não nos parece. Primeiro, porque estas explicações pouco adiantam para a cura do mal; segundo, porque os alunos parecem inteiramente desejosos de inverter a fração que o não deve ser ou mesmo as duas e multiplicar. A maior parte dos alunos, podemos asseverar com segurança, está sempre pronta a inverter uma ou ambas as frações, ou trocá-las ou substituir os numeradores, enfim, a fazer outra qualquer manobra que arraste a uma solução aceitável. Qual, então, a dificuldade?

Ponha-se o leitor na situação de uma criança que tenha dividido milhares de vezes e tenha observado que, em todas as divisões, o resultado é muito menor do que o número dividido — que fez uma associação invariável de "dividir" com "torna muito menor". De repente, quando lhe dizem que $16 \div \frac{1}{8}$ dá um resultado muito maior do que 16, que $1\frac{2}{3} \div \frac{3}{8}$ dá um resultado muito maior do que $1\frac{2}{3}$, há uma natural e, em certo sentido, recomendável resistência para não confiar num procedimento que leva a um resultado oposto àquele que se habituara a considerar como certo e que sabe ser a essência da divisão. Esta falta de confiança é muito desfavorável ao aprendizado. Demais, as velhas explicações, sendo dirigidas exclusivamente para a justificação do ato de inverter e multiplicar, esqueciam-se de ensinar claramente que apenas uma das frações deve ser invertida e qual o deve ser.

Para sanar tal dificuldade, faz-se mister, pois, revisar a velha atitude tomada pelo aluno relativamente à divisão, para torná-la adaptável ao novo caso, fazendo que as respostas certas se lhe apresentem como tais, e ensinando-lhe, incidentalmente,

a inverter a fração que deve ser invertida. Em capítulo ulterior veremos como alcançar tal resultado.

Outra dificuldade muito comum encontra-se em obter a solução rápida de problemas como os seguintes: "se uma junta de bois leva 5 dias para puxar 36 toneladas de carvão a certa distância, quanto tempo levará para puxar 48 toneladas à mesma distância?" ou "Se 3 lbs. e $\frac{1}{2}$ de carne custam \$1.12, quanto custarão 4 lbs. e $\frac{3}{4}$?". As soluções rápidas exigem a comparação de 48 com 36, na forma de "tantas vezes menos ou mais tempo" e de $4\frac{3}{4}$ com $3\frac{1}{2}$ na forma "tantas vezes menos ou mais caro".

E' comum entre professores convencerem-se de que a dificuldade, nestes casos, está no fato de não saber o aluno raciocinar. Então insistem: "Você poderia ter feito isto, mas você não pensa". Esta é, realmente, às vezes, a dificuldade, mas raramente. De comum, a causa é bem diversa.

Parte da dificuldade está em que é indispensável inteligência para ver que a comparação "tantas vezes" deve ser feita e ligada aos comparativos dos adjetivos ("longo", "rápido", "caro", "barato", "pesado", "leve" ou o que fôr); parte, na falta de familiaridade do aluno com a forma de comparação "tantas vezes" associada à divisão, como meio de solucioná-la. Esta segunda parte da dificuldade pode-se evitar ou remediar com a prática. Tal prática, porém, não se tem efetuado; de um lado, porque os professores e autores de compêndio teem uma concepção exagerada das aptidões dos alunos, quando inferem que para estes "Quantas vezes 5 está contido em 40?" ou "Quantas vezes 40 conteem 5?" significa "dividir 40 por 5", e, por outro lado, porque, acertadamente, preferem não usar prematuramente estas formas de interrogações. Os novos métodos evitam-nas pelo uso da forma do "número omisso" — "40 contém ... vezes 5" e "40 = ... × 5, e efetuação de muitos

exercícios, em que a divisão aparece como meio de responder a tais perguntas. Exs.:

Quantas vezes ... é mais { *alto* / *comprido* / *pesado etc.* } *do que ...*

1. Diga os números que faltam:

A.	B.	C.
84 = ... × 21	$\frac{1}{2}$ pol. = ... × $\frac{1}{4}$ pol.	6 = ... de 24
44 = ... × 4		6 = ... de 18
1,6 = ... × 2	$\frac{3}{4}$ lb. = ... × $\frac{1}{4}$ lb.	6 = ... de 48
1,6 = ... × 20		6 = ... de 9
	1 h. = ... × $\frac{1}{4}$ h.	
	\$1.25 = ... × 25¢	

Revisão oral

Pratique com os exercícios abaixo até conseguir dar todos os quocientes certos em 3 minutos.

A.	B.	C.
a. 10 = ... × 2	*i.* 15 = $\frac{1}{4}$ × ...	*q.* 20 = $\frac{4}{5}$ de ...
b. 10 = ... × $3\frac{1}{3}$	*j.* 15 = $\frac{1}{2}$ de ...	*r.* 20 = $\frac{5}{6}$ de ...
c. 12 = ... × 2		

d. $12 = \ldots \times 3$

e. $12 = 1\frac{1}{2} \times \ldots$

f. $15 = \ldots \times 5$

g. $15 = 2 \times \ldots$

h. $15 = \frac{1}{3} \times \ldots$

k. $15 = 3 \times \ldots$

l. $16 = \ldots \times 2$

m. $18 = \ldots \times 2$

n. $18 = \ldots \times 3$

o. $20 = 2 \times \ldots$

p. $20 = 5 \times \ldots$

s. $20 = \frac{2}{3}$ de ...

t. $24 = 2 \times \ldots$

u. $24 = 1\frac{1}{2} \times \ldots$

v. $24 = 3 \times \ldots$

w. $24 = 50\%$ de...

x. $24 = 10\%$ de...

D.

$32 = \frac{1}{2}$ de ...

$32 = \frac{1}{4}$ de ...

$32 = \frac{2}{3}$ de ...

$32 = 50\%$ de ...

$32 = 10\%$ de ...

E.

$16 = \ldots$ de 24

$16 = \ldots$ de 48

$16 = \ldots$ de 32

$16 = \ldots$ de 160

$16 = \ldots$ % de 200

F.

$6 = \ldots$ de 9

$6 = \ldots$ de 10

$6 = \ldots$ de 11

$6 = \ldots$ de 12

$6 = \ldots$ de 15

A forma de equação com um espaço em branco para receber o número a ser determinado é muitíssimo usada pelos novos métodos. Como um substituto ou alternativa para "Que parte de 8 é 6?" temos "6 = ... de 8". Como um substituto ou alternativa para "De que número 6 é três quartos?" temos "$6 = \frac{3}{4}$ de ...?". "Por quanto se devem multiplicar $2\frac{1}{2}$ para obter $\frac{3}{4}$?" substitue-se por "$\ldots \times 2\frac{1}{2} = 3\frac{3}{4}$"; e do mesmo modo com outras expressões verbais. A forma equa-

cional constitue o modo mais simples e mais claro de expressar um problema quantitativo. E' um dos melhores modos de reter os fatos aritméticos. O seu uso estimula e treina o hábito de verificar os resultados obtidos para ver se realmente satisfazem as exigências impostas. Prepara o aluno para entender fórmulas e igualdades de toda espécie. E' um modêlo de pensamento conciso, claro e decisivo.

Outra dificuldade, em geral encontram os alunos: a avaliação e a aplicação de percentagens acima de cem. Aí costumam os alunos cometer erros, embora saibam avaliar com precisão percentagens abaixo dêsse limite. A duas causas muito simples podemos atribuir essa dificuldade. Primeira, falta de compreensão segura e pronta das grandes percentagens. Segunda, versarem os exercícios durante largo tempo, exclusivamente, sôbre percentagens abaixo de cem e, na maioria, abaixo de cincoenta. Daí o se embaraçarem os alunos, quando obrigados a calcular percentagens de 140 ou 205 ou quando chegam a resultados como 1,40%, ou 2,05%, e ficarem perplexos, desconfiando que algo há errado no seu cálculo. E' que não possuem um conhecimento seguro e pronto que lhes sugira uma atuação correta.

Uma inspeção dos compêndios ordinàriamente usados confirmam o nosso juizo, neste particular. Por exemplo, o primeiro livro que nos cai sob as mãos apresenta apenas dois por cento de percentagens acima de 100, nas 31 primeiras páginas de exercícios sôbre o assunto.

Há meios para sanar essa dificuldade. O melhor parece ser efetuar, logo no início do aprendizado, exercícios semelhantes aos que apresentamos abaixo e ir incluindo, aqui e ali, na prática geral, uns poucos casos de percentagens acima de 100.

1. Preencher as lacunas, como nas duas primeiras linhas:

A	B
15% de 200 = .15 × 200 ou 30	25% de 40 = .25 × 40 ou 10
115% de 200 = 1.15 × 200 ou 230	125% de 40 = 1.25 × 40 ou 50
125% de 200 = 1.25 × 200 ou ...	110% de 40 = 1.10 × 40 ou ...
150% de 200 = 1.50 × 200 ou ...	120% de 40 = 1.20 × 40 ou ...
200% de 200 = 2 × 200 ou ...	210% de 40 = 2.10 × 40 ou ...
210% de 200 = 2.10 × 200 ou ...	310% de 40 = 3.10 × 40 ou ...

Avaliação de percentagens

1. Nomeie alguma coisa que pese cêrca de 1% do pêso de um homem.

2. Alguma coisa que pese cêrca de 10% do pêso de um homem.

3. Alguma coisa que pese cêrca de 50% do pêso de um homem.

4. Alguma coisa que pese cêrca de 200% do pêso de um homem.

5. Alguma coisa que pese cêrca de 500% do pêso de um homem.

6. A irmãzinha de Alice pesava 8 lbs., quando nasceu, e pesa agora, no seu primeiro aniversário, 22 lbs. Quantos por cento do seu pêso atual correspondem ao seu pêso primitivo?

7. Se, nos próximos cinco anos, ela aumentar 150% das 22 lbs., quantas libras aumentará e qual será o seu pêso no 6.º aniversário?

8. A irmã de Helena pesava 24 lbs., no seu primeiro aniversário, e aumentou 125% nos cinco anos seguintes. Quantas libras aumentou e quanto pesou aos seis anos?

9. Avalie ràpidamente quantos são aproximadamente 205% de 650. Depois, multiplique para achar o número exato.

10. Quanto se aproximava o seu cálculo do valor exato?

11. Avalie rápida e aproximadamente o valor de 125% de $15.00. Procure, depois, o valor exato.

12. Qual a aproximação de seu cálculo quanto ao valor exato?

13. Quais dos pesos abaixo aumentaram cêrca de 3%? 100%? 200%? 1000%?

Uma criancinha que pesava 7 lbs. e pesa agora $21\frac{1}{4}$ lbs.

Um perùzinho que pesava 2 lbs. e pesa agora 2,96 lbs.

Um menino que pesava 80 lbs. e pesa agora 82,4 lbs.

Um bezerro que pesava 75 lbs. e pesa agora aproximadamente 850 lbs.

14. Pense em alguns animais que hajam aumentado, em um ano, cêrca de 1000% ou mesmo mais.

15. Quantos por cento de 120 são 30? De 300? De 600?

16. Quantos são 16, 160, 80 e 180 por cento de 40?

Os três exemplos que vimos de citar, bastam para dar idéia de como hoje se podem diagnosticar com mais segurança as dificuldades do aluno, graças a um estudo mais atento da situação e a uma consideração especial da experiência e atitude do aluno em face da mesma. Põem em evidência o princípio geral que os novos métodos defendem, em todos os casos: estudar o aluno tão bem quanto a lição; estudar a situação do ponto de vista do aluno, tomando em conta tanto as suas tendências com relação à mesma, como as reações que se lhe desejem provocar.

APERFEIÇOAMENTO PROGRESSIVO DOS MEIOS DE ENSINO

E' evidente que certos exemplos e certas ilustrações são superiores a outros, que certos cálculos mostram mais claramente certos princípios do que outros, que certos fatos são mais adequados do que outros a centros de problemas. Neste sentido, o ensino vem progredindo muito. Tem conseguido descobrir para cada fato, cada princípio, cada tipo de problema, o exemplo, a ilustração, o cálculo, o fato mais adequado a facilitar-lhe o aprendizado. Hoje, o seu uso faz parte das melhores práticas aceitas.

Assim, não é por mera casualidade, que aparecem com tanta freqüência, nos primeiros passos da multiplicação por números de dois algarismos, multiplicadores como 22, 33, 44, etc. Por que, então? E' que se observou que põem em evidência a importância da colocação dos produtos parciais. Assim, no ensino da avaliação de oitavos, a polegada é especialmente útil; tanto esta como a libra são particularmente valiosas na avaliação de dezesseis avos, e a segunda na avaliação de quintos, cujo aprendizado torna mais interessante. Assim vai-se chegando a um acôrdo geral sôbre que as primeiras combinações de multiplicação que se devem ensinar sistemàticamente, são as de $\times$ 5, não só por serem muito fáceis, como, principalmente, por estabelecerem uma distinção muito clara entre a multiplicação e a adição (2×2 é o mesmo que $2 + 2$, e 6×2 não é muito

mais que $6 + 2$, mas 5×5 e 6×5 estão muito distanciados de $5 + 5$ e $6 + 5$).

Os novos métodos procuram deliberadamente o melhor meio de ensino para cada tópico do aprendizado da aritmética. Estudam carinhosamente os jogos infantís, o ambiente familiar à criança e as atividades escolares, com o propósito de adaptar o ensino à realidade, de aumentar o interêsse, de ilustrar um conceito ou aplicar um processo. Só se valem dos melhores meios e, dentre vários, os que sejam igualmente bons. Estudam detidamente cada pormenor relativo aos meios de ensino, na esperança de descobrir algo melhor para atingir um resultado particular almejado. Alguns resultados dessas pesquisas demonstrarão o leitor as possibilidades que se oferecem ao aperfeiçoamento do ensino neste sector.

Não se proclama, entretanto, que os meios citados sejam a última palavra a proferir em matéria de meios de ensino para os casos que vamos considerar. Ao contrário, os novos métodos procuram avançar sempre, num progresso ininterrupto.

I Caso. *Continuação das divisões de inteiro por número simples, qual o melhor meio de iniciar os alunos neste caso que se habituaram a expressar: "... e resto ..."?* (Fins do 4.º ano). A melhor introdução para êste caso parece ser o cálculo de médias de notas escolares, pois abrangendo em geral, essas médias nove décimos (provàvelmente mais) dos casos em que há necessidade de continuar divisões até décimos, a capacidade de calcular êsses quocientes vai assim se formando nos moldes em que terá de ser aplicada na vida corrente. As notas escolares são fatos vitais e familiares. O sentido de média, ensinado através delas, será entendido mais fácil e claramente do que por meio de alturas, pesos, preços ou comprimentos. Um interêsse legítimo anima o trabalho, quando se trata de achar o quociente exato de médias, pois se Maria tem 90 + ... e Jeni também, saber qual das duas obterá melhor classificação é assunto que as interessa diretamente, assim como aos amigos e inimigos de ambas. A mesma unidade de lição servirá para facilitar e assegurar a compreensão da expressão "média", têrmo de tão grande utilidade para o ensino do novo processo e para a vida prática.

II Caso. *Divisão de complexos por inteiro. Ótimo problema para iniciação. Aplicações reais e úteis.* (5.º ano). Para iniciar os alunos na divisão de complexos por inteiro, pode-se fazer algo melhor do que perguntar o comprimento médio de alguns pedaços de fazenda, arame ou cordel, cuja média, provàvelmente ninguém se lembraria jamais de indagar, pois certamente, a ninguém interessaria conhecer. Examinemos a seguinte:

Divisão

1. As alturas dos onze jogadores do "team" de "foot-ball" da Escola Complementar de Clinton somam 62 pés e 9 polegadas. Qual a altura média dos rapazes do "team"?

62 pés 9 pol. | 11

$$5 \text{ pés } 8\frac{5}{11} \text{ pol.}$$

$$62 \div 11 = 5 \text{ pés e } 7 \text{ pés de resto}$$

$$7 \times 12 = 84$$

$$84 + 9 = 93. \quad 93 \text{ pol.} \div 11 = 8\frac{5}{11}$$

2. Ricardo e Carlos estão se treinando na corrida de uma milha, a pé. Em cinco experiências, Ricardo alcança os tempos de 6 min. e 12 seg., 5 min. e 58 seg., 5 min. e 34 seg., 6 min. e 10 seg. e 6 min. e 18 seg. Qual a média de tempo atingida?

3. Carlos alcança os tempos de 6 min. e 15 seg., 6 min. 10 seg., 5 min. e 53 seg., 6 min. e 28 seg. e 5 min. e 50 seg. Qual a média do tempo obtido?

4. Um vapor vai de Nova-York a Liverpool, em 7 d. e 6 h. em uma viagem, 7 d. e 4 h., em uma segunda viagem, 6 d. e 18 h. em uma terceira, e 6 d. e 11 h. na quarta. Qual a média de tempo obtida?

5. As alturas das jogadoras do "team" de basket-ball" da Escola Complementar de Clinton são: 5 pés e 6 pol., 5 pés e 7 pol., 5 pés e 3 pol., 5 pés e 4 pol. e 5 pés e 8 pol. Qual a altura média das meninas do "team"?

III Caso. *Quais as melhores conexões a fazer de comêço entre "Quantos por cento de a é b? E a realidade?* (6.º

ano). As melhores parecem ser as que se podem fazer com jogos, vitórias, perdas ou empates de partidas, e com trabalhos escolares, número de palavras soletradas ou problemas resolvidos corretamente nos testes escolares. A familiaridade com os dados e os fatos, torna claro o assunto e rápida, conveniente e fàcilmente compreensível a verificação dos resultados. Os trabalhos desenvolvem-se em situações reais. O interêsse dos meninos é fàcilmente cativado e mantido pelo emprêgo de "records" de equipes conhecidas e o das meninas e de alguns rapazes, pelo uso de testes feitos pelos alunos.

IV Caso. *Que meio se poderá utilizar para facilitar a comparação de decimais e ordinárias, quando se pretende ensinar a fazer conversões?* Examinemos o seguinte: Usar problemas como:

Os meninos do 6.º ano receberam os resultados de provas atléticas e estavam interessados em saber qual dos atletas incluídos na lista, saltaram à maior distância.

R. Locke 14,75 pés.
D. Wade 14 pés e 8 pol.
V. Lavisse (de uma escola francesa) 4m,41 (1 metro = 39,37 pol.).
S. Beach $3\frac{3}{4}$ jd.

1. Qual dêles pula à maior distância?
2. Qual o seguinte?

Algumas meninas estavam interessadas em saber qual dos cobertores abaixo, que eram de procedências diversas, tinha maior tamanho.

$2\frac{1}{4}$ jd., $\times$ $2\frac{1}{12}$ jd.
2 jd. e 4 pol. $\times$ 2 jd. e 6 pol.
2m. de compr. $\times$ 2m. de larg.
80 pol. $\times$ 78 pol.

3. Qual o cobertor maior?
4. Qual o seguinte em tamanho?

Esta introdução é fraca, sob certo ponto de vista, pois que apresenta medidas um tanto irreais, relativamente aos fatos citados (a decimal de pé e jarda para pulo). Isto se faz, sem dúvida, para tornar mais notável a necessidade de conversão. A variedade de medidas aplicadas a fatos da mesma natureza faz sobressair essa necessidade. Os problemas (salvo na parte criticada) são legítimos e muitíssimo interessantes. Os números foram escolhidos de tal modo que o aluno não pode achar a solução, senão realizando conversões. O aluno é obrigado a pensar no que tem de converter e a que tem de converter, o que reforça a regra de que deve converter as medidas para torná-las comparáveis.

V Caso. *Como se poderá efetuar prática interessante, vital e variada, sôbre a organização de escriturações pessoais, mantendo toda a classe em atividade sôbre o mesmo item, para que possa o mestre supervisar os alunos e estes comparar e criticar recìprocamente os trabalhos?*

A maior parte dos alunos do sexto e do sétimo ano não teem contas a registar. Se o tivessem, feitas independentemente, não teriam a virtude de atrair a atenção de toda a classe e, pràticamente, seriam impossíveis de fiscalizar e corrigir. Como solucionar o caso? Parece que a melhor solução é pedir aos alunos relatorios de assentamentos *imaginários* e estabelecer para isso condições tão especificadas que fiquem assegurado o interêsse, a variedade e a necessidade de uma boa organização. A seguir, damos um exemplo dêste modo de tratar a questão.

Escrituração de Receitas e Despesas

Uma aluna enumera a sua receita e as suas despesas do modo seguinte:

"Imaginem que me chamo Helena e sou filha de um homem rico. Hoje é segunda-feira e tenho um saldo da semana anterior no valor de $6.25. Papai dá-me 1 dólar por semana. Além disso, ganhei de tio Rogerio $2.00, na quarta-feira. Terça-feira, gastei 50¢ com um livro e 30¢ com uma corda de violino. Quinta-feira, comprei 4 refrescos a 10¢ cada um. Sábado, gastei $1.50 com a entrada de um concêrto e domingo, dei 10¢ à Escola Dominical.

Os demais fazem as contas de Helena, imediatamente, depois de haver ela declarado quanto recebe e quanto gasta, calculando quanto lhe resta ao fim da semana.

A seguir, outro aluno imagina-se um rapaz ativo que consegue ganhar dinheiro de várias maneiras e declara a sua receita e a sua despesa semanais.

Depois, outra aluna imagina ser uma ótima cantora, que dá concertos e gasta em música e lições.

E os demais vão anotando os ganhos e gastos de cada um e calculando o saldo.

Pratique com as somas que seguem, para poder entrar no jôgo de "Receita e despesa" e acertar as questões.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
7,16	5,08	9,12	8,31	4,16	0,75	3,70	4,96
7,69	1,08	1,98	9,33	9,54	3,95	4,94	8,64
0,75	0,33	0,49	0,46	1,25	0,68	0,70	0,18
0,48	0,22	0,95	1,00	0.42	0,27	0,65	4,49
2,65	6,18	0,36	0,56	0,88	7,48	6,21	0,42
0,54	0,45	9,10	0,88	0,36	1,30	0,34	1,32
0.56	2,25	0,21	8,75	0,92	2,18	1,75	0,95
0,33	0,42	1,20	7,56	8.56	0,97	1,40	5,68
5,24	0,95	0,92	1,10	0,95	9,36	0,45	1,88

Os cinco casos considerados mostram como pode o professor pesquisar, através do ambiente em geral, para descobrir meios que facilitem o aprendizado de cada tópico especial. Do mesmo modo, pode o professor de qualquer cidade ou vila pesquisar através do ambiente particular em que funciona a sua escola, procurando meios para tornar interessantes, agradáveis e fáceis os conhecimentos que haja de ministrar. Assim, se tiver de ensinar medidas de madeira, deverá informar-se se nos arredores existe alguma casa em construção e conduzir os seus pequenos até lá. Deverá saber que tal ou tal campo ou parque da localidade mede 2 acres aproximadamente, afim de, quando tiver de dar a noção de acre, dispor de uma conexão real com a qual possa aclarar o seu conceito. Deverá procurar descobrir

em que e como os negócios da farmácia do bairro podem oferecer motivos para o aprendizado da aritmética. Deverá tratar de conhecer os brinquedos e jogos preferidos pela petizada e descobrir como utilizá-los. Enfim, deverá conhecer minuciosamente tudo quanto tenha de ensinar e procurar aperfeiçoar a sua técnica, de ano para ano.

TEMAS PARA DISCUSSÃO

1. Si os alunos se exercitarem muito em somas como

8	9
4	5
9	6,
3	7

em trabalhos escritos, antes de aprender a lidar com *reservas*, por que maus caminhos poderão enveredar, quando iniciarem tal aprendizado?

2. Seria melhor pedir apenas respostas orais?

3. Alguns alunos, teem a tendência de somar 1 à proxima coluna, sem se preocupar se a soma da coluna anterior pertence à primeira, à segunda, ou à terceira dezena. Qual será a causa provável disto? Que faria o leitor para evitá-lo?

4. Há casos em que o domínio absoluto de certos fragmentos de conhecimento e uma absoluta confiança em tais conhecimentos, auxilia a compreensão de certas teorias e certos processos. Como poderá o domínio de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, $\frac{1}{4} = 0{,}25$ e $\frac{1}{4} = 0{,}125$ facilitar o aprendizado da colocação da vírgula na multiplicação de decimais?

5. Citar outro caso em que o conhecimento de certos fatos facilitem o aprendizado de novos processos.

6. Depois de estudar os números até cem, um aluno escreveu 61, 71, 81 e 91 em vez de dezesseis, dezessete, dezoito e dezenove; outro escreveu 60, 70, 80 e 90; outro 610, 710, 810 e 910; outro 6, 7, 8 e 9, observando que sabia haver mais alguma coisa, mas não podia precisar o que fôsse. Por que teria um hábito intrìnsecamente bom predisposto a todos êsses erros?

7. Citar algum caso de hábito bom, em si, mas que possa induzir ao êrro?

8. Será acertado dar, em vinte casos de divisões longas, dezenove sem resto? Justificar a resposta.

9. Em uma "escala" de testes de 10 passos de dificuldades graduadas, 5 exemplos para cada passo, dois alunos alcançaram os seguintes resultados:

Respostas certas

	Aluno A	Aluno B
1.º passo	5	3
2.º "	5	5
3.º "	5	2
4.º "	4	3
5.º "	5	4
6.º "	4	3
7.º "	1	5
8.º "	0	4
9.º "	0	0
10.º "	0	0
Total	29	29

Qual dos dois alunos conhece melhor o processo? Qual o mais negligente?

10. Que material se poderá empregar para objetivar o ensino de $\frac{}{16}$? De $\frac{}{5}$?

11. Observar o material empregado para $\frac{}{12}$ e $\frac{}{24}$ (II, 17), $\frac{}{7}$ e $\frac{}{9}$ (III, 133); $\frac{}{32}$ e $\frac{}{64}$ (III, 262). Observar quaisquer outras aplicações reais dessas frações e julgar quais dentre elas terão valor instrutivo na escola primária.

12. Qual o melhor grupo de fatos da multiplicação para ser ensinado primeiro, os de 5 ou os de 1?

13. Pense o leitor em algumas aplicações de "quantos por cento de *b* é *a?*" que lhe pareçam especialmente úteis ao aprendizado dêste fato. Compare com os das págs. 191, 192 e 196, II.

14. Examinar os meios utilizados para assegurar uma boa disposição de espírito para com o aprendizado da avaliação de áreas (II, 221). Pense em outros meios de atingir a mesma finalidade.

15. Ver os meios de que se lançou mão para ensinar a aplicação e o levantamento de gráficos (III, 30, 81, 164, 166, 177, 182, 194-196, 230 e 231), levando em consideração tanto o valor do trabalho de aritmética a êles associado, o interêsse que possam despertar e o seu valor prático, quanto o serviço que possam prestar ao ensino de princípios elementares da representação gráfica de fatos quantitativos.

CAPÍTULO IX

ALGUMAS DIFICULDADES

Muitas das dificuldades experimentadas pelo aluno no aprendizado são absolutamente desnecessárias. O bom mestre pode, como vimos, evitá-las, ensinando cada assunto do modo exato por que deve ser ensinado e no momento exato em que o deve ser. Há, entretanto, alguns casos inerentemente difíceis. São difíceis e sempre o serão. O que nos cabe fazer é reduzir a dificuldade ao inevitável. Os novos métodos empenham-se em consegui-lo, procurando localizar a dificuldade essencial e descobrir o meio mais adequado à mente infantil para enfrentá-la e vencê-la. Em continuação, procuraremos demonstrar, em quatro casos típicos — divisões longas, dificuldades inerentes ao uso de zeros, divisão de frações e raiz quadrada — o que os novos métodos teem alcançado neste sentido.

DIVISÃO LONGA

As divisões longas são difíceis (1) porque exigem "julgamento" na seleção dos algarismos a experimentar no quociente, (2) porque é complexa, exigindo transferências da divisão para a multiplicação, desta para a subtração e daí para o algarismo a baixar, (3) porque teem poucas aplicações que chamem a atenção dos pequenos para a sua importância e possam ser utilizadas para despertar interêsse pelo trabalho.

A seleção dos números que devem multiplicar o divisor pode ser facilitada de comêço, pelo uso de divisores como 21, 31, 41 ou 19, 29, 39, porém, mais cedo ou mais tarde, o aluno terá de "julgar" por si mesmo qual o algarismo conveniente. Êste julgamento exige (para divisores de dois algarismos) pronto conhecimento dos produtos de 2 a 9 e de 20 a 90, pelos dígitos, desembaraço na soma mental do segundo caso e um poder de coordenação ou de associação, para que, por exemplo, vendo 6125|76, possa ràpidamente pensar 9 × é muito; 8 ×, é muito próximo, 7 × é muito provável, isto é, pensa 9 × 70 = 630, 8 × 70 = 560 e 7 × 70 = 490, tudo num relancear de pensamento, e retém na mente o essencial, 560 e 490, enquanto pensa "tanto 8 como 7 vezes 6 convém". Enquanto se decide a experimentar 8 ou 7, deve ainda multiplicar mentalmente para julgar da segurança com que pode escrever 8, pensando, ao mesmo tempo em 612, que não deve perder de vista. Ora, isto de pensar em vários fatos simultâneamente, é bem difícil.

Consideremos o processo do modo seguinte: Se todos os passos fôssem dados em uma ordem racional, mas sem pressa, nem abreviações, o aluno, tendo de dividir 6125 por 76, pensaria: 9 não, porque 9 × 70 = 630; 8 provàvelmente, 8 × 6 = 48, 8 × 7 = 56, + 4 = 60, 608, convém 8", ou "7 × 70 = 490, pode ser, 8 × 70 = 560, pode ser, 7 × 6 = 42, 8 × 6 = 48" e assim um ou mais passos adiante, para se decidir, finalmente por um dos números pensados; ou recapitularia algumas séries de fatos igualmente complicados. Em qualquer ponto pode arriscar uma decisão. Assim em 4276|74 o pensar em 6 × 70 = 420 com o 4 de 74 e o 7 de 427 em vista, conduzirá provàvelmente o leitor a resolver-se imediatamente a tentar 5. Ora, isto se daria por uma rápida coordenação de fatos ou de probabilidades.

Para selecionar o algarismo correto, deve-se ou (A) anotar muitos fatos e examiná-los minuciosamente ou (B) guardar em mente muitos fatos e refletir sôbre êles ou (C) tomar tão cedo, quanto ouse arriscá-lo, uma decisão, à base de uma parte dêsses fatos. Se se conduzirem os alunos segundo A, o tra-

balho se tornará fastidioso e muito difícil. Se se encaminharem segundo B, o trabalho será menos entediante, mas mais difícil. Se se orientarem segundo C, será muito menos fastidioso, mas ainda muito mais difícil. Não há razão, entretanto, para exigir que o aluno acerte ao primeiro ensaio. Isto pôsto, a melhor das práticas é arriscar uma decisão, multiplicar e experimentar outro número, se o primeiro fôr forte ou fraco. Bons calculistas assim operam. Deve-se, portanto, encorajar os alunos e mesmo insistir com êles a que procedam assim. A seleção dos algarismos a experimentar no quociente não deveria ser feita por nenhuma prescrição convencional, mas por inspeção geral da situação, acompanhada de cálculo mental suficiente, de qualquer natureza, contanto que conduza a uma estimativa acertada. Se, em casos, como os acima descritos, as primeiras tentativas de multiplicações (de 70×8 e 7, neste caso) conduzirem a nove decisões corretas em 10, ou mesmo a quatro em cinco, ter-se-á feito uma economia de tempo maior do que se se procedesse a retentativas. Em linguagem infantil a regra deveria ser: "Adivinhe e diga, logo que achar que pode acertar", embora o processo em nenhum sentido possa ser qualificado como idéia inconsiderada. E', mais pròpriamente, o atuar do repertório inteiro das capacidades de uma pessoa relativamente à situação a que chamamos julgamento, tato, discernimento ou perspicácia.

As crianças agirão assim e sentirão prazer em fazê-lo, se forem bem orientadas, conquanto, de princípio, isto repugne aos hábitos adquiridos no aprendizado da aritmética. A maior parte do que faziam era por estrito automatismo. Os novos métodos, porém, preparam o aluno para o ato mental de escolher, ensinando-lhe a derivar $7 + \ldots = 11$, valendo-se dos fatos da adição já conhecidos, até achar a combinação conveniente $7 + 4$; e, ulteriormente, ensinando-lhe a derivar os fatos da divisão dos da multiplicação. Mesmo assim, de comêço, nas divisões longas, reluta para avançar, assumir a responsabilidade e tomar uma decisão. Se se sugere o uso de 70 como "guia" para as divisões de 71, 72, 73 ou 74 e 80 para 79, 78, 77 ou 76, o aluno tende a aceitar o "guia" como norma a seguir implicitamente. Porisso, os novos métodos raríssimas vezes se re-

ferem a "guias"; ao invés reforçam os elementos de iniciativa e decisão, pelo método de "ensaio e êxito". Depois de dominado o processo geral com divisores como 21, 31, 41, 29, 39, 49, apresentam o trabalho, como se mostra abaixo.

Achar os quocientes e os restos. Pode-lhe acontecer tomar um algarismo errado para o quociente. Neste caso, veja se é forte ou fraco e substitua-o. Mas procure acertar, logo da primeira vez.

11.

992 | 47 — Em 99 há 2 vezes 47 ou 1 só?

12.

538 | 27 — Em 53 há 2 vezes 27 ou só 1?

13.

476 | 17 — Em 47 há 3 vezes 17 ou só 2?

14.

81062 | 35 — Experimente 2. Como sabe que dá 2 e não 3?

15.

9276 | 13 — Experimente 1. Por que não dá 2?

16.

817 | 28 — Em 81 há 3 vezes 28 ou só 2?

17.

1249 | 312 — Experimente 4. Por que não dá 3?

18.

375 | 151 — Vai experimentar 3 ou 2?

19.

375 | 123 — Vai experimentar 3 ou 2?

20.

650 | 225 — Vai experimentar 3 ou 2?

21.

425 | 25 — Vai experimentar 2 ou 1?

22.

470 | 15 — Vai experimentar 4 ou 3?

23.

615 | 15 — Vai experimentar 4 ou 3?

24.

495 | 211 — Vai experimentar 7, 6 ou 5?

A complexidade do processo, que obriga a transferência da escolha do algarismo do quociente para a multiplicação, desta para a correta colocação do produto, dêste para a subtração e desta para o ato de baixar o algarismo do dividendo, não pode ser evitada, nem muito atenuada. O espaçamento largo dos

dígitos do dividendo facilita um tanto o trabalho. O domínio prévio de cada processo, em separado, previne o excesso de dificuldades. Contudo, o processo da divisão longa é complexo. Portanto, deve se considerar que o aluno precisa de tempo e esfôrço para dominá-lo.

O mesmo se pode dizer quanto à falta de utilidade prática e definida das divisões longas, que se usam, principalmente, em planos, cálculo de custo e trabalhos científicos. Problemas semelhantes aos das páginas 201 e 202, são dos melhores que o mestre pode oferecer sôbre "Usos da divisão longa". Ademais, esta nenhum apêlo faz aos interêsses inteletuais da atividade mental e de realizações.

O máximo que se pode fazer é: Primeiro, aceitar a situação e tratar de impô-la ao interêsse dos alunos, dizendo-lhes que as divisões longas são uma espécie de exame ou teste das capacidades adquiridas e que conseguir acertá-las é dar prova de que se sabe multiplicar, somar e subtrair corretamente. Segundo, transferir as aplicações das divisões de quocientes extensos para depois do aprendizado dos decimais, efetuando no 4.º ano, principalmente, divisões de quocientes simples ou de dois algarismos apenas e alguns exercícios, mas poucos, com quocientes maiores, para ensinar o processo — isto é, mostrar que em uma só conta, se pode *multiplicar*, *subtrair* e *baixar* algarismos. A um aluno do 4.º ou do 5.º ano ou mesmo mais adiantado não é absolutamente necessária a adquisição de grande velocidade nas divisões longas. Raramente encontrará na vida problemas que exijam o uso dessas divisões. Se souber, com segurança, o que deve fazer e como deve fazê-lo, teremos cumprido o nosso dever. E' conveniente treinar o aluno em divisões de quocientes simples. Êsse treino lhe facilitará o trabalho de determinar os algarismos do quociente e estimar, aproximada e ràpidamente, quantas vezes um número contém outro. Alguns exercícios da espécie de que estamos tratando, encontram-se às páginas 201 e 202.

Uma festa de Natal

O natal aproxima-se. Os pequenos da Escola X, estão se preparando para receber Papai Noel.

1. Resolvem recortar 100 estrêlas douradas. A professora diz-lhes: "Vou fazer uma para modêlo. Vocês farão o resto". Há 33 crianças. Quantas estrêlas deve recortar cada uma?

2. Desejam fazer 12 correntes de papel de 50 elos cada uma. A professora fez 6 elos para modêlo. Os alunos vão fazer os demais. Quantos elos deve fazer cada um?

[3. Um problema de multiplicar. 4. Um problema de subtrair.]

5. 16 das crianças dividem igualmente entre si o trabalho de fazer 8 dúzias de cornucópias. Quantas deve fazer cada uma?

Divisão por números de mais de dois algarismos

1. Além do terreno usado para os caminhos, o jardim da escola tem 6100 pés quadrados, que devem ser cultivados pelos alunos. Há na escola 254 crianças. Quantos pés quadrados tocará a cada aluno, se os 6100 pés quadrados forem divididos igualmente entre êles? Quantos pés quadrados restarão?

6100 | 254 *Pense quantos 254 há em 610.*

Três é muito, pois 3 × 254 = 762, que é mais de 610.

Usos de divisões longas

(Quando precisar, use papel e lapis)

1. 14 rapazes resolvem comprar juntos uma bola de "football". A bola custa 98¢. Quanto deverá pagar cada um?

2. Resolvem comprar, também, uma máscara de esporte, em segunda mão, a qual custa 70¢. Quanto terá de pagar cada rapaz, 7¢, 6¢ ou 5¢?

3. Quantas jardas de fita de 50¢ a jarda pode você comprar com 60¢? Com 45¢? Com 75¢? Com 90¢? Com $1.05?

4. Os bilhetes de concêrto costumam custar 75¢ cada um. Quanto custarão três bilhetes? Quantos bilhetes se poderão

comprar com $2.00, e quantos ¢ restarão? Quantos bilhetes se poderão comprar com $3.00? Quantos bilhetes se poderão comprar com $4.00 e quantos ¢ restarão? $5.00 dará para comprar 7 bilhetes? E $6.00 dará para 8?

Ganho e economia

1. João pensa em ganhar .. $17.25 para comprar uma bicicleta. Pode obter $.75 por semana, trabalhando em uma loja. Em quantas semanas ganhará êle o suficiente para comprar a bicicleta?

1725 | 75 *O quociente representa semanas.*

2. Maria que está no ginásio, ganha $14.00 por mês, trabalhando à noite. Em quantos meses ganhará ela o necessário para comprar uma máquina de escrever do valor de $70.00?

70 | 14 *O quociente representa semanas.*

Para achar o número de vezes que certa quantia está contida em outra, primeiro, reduza ambas a centavos ou ambas a dólares. Depois, divida.

Nas liquidações as lojas vendem, às vezes, objetos de 25 centavos por 19¢.

3. Quantos objetos de 25¢ podem ser comprados com 75¢, numa liquidação? Quantos centavos restarão?

4. Quantos poderá você comprar com $1.25 e quantos centavos lhe sobrarão?

5. Quantos poderá comprar com $1.00? **6.** Com $4.50? **7.** Com $4.75? **8.** Com $2.50?

Nos dias de liquidação, as lojas vendem qualquer artigo de 50 centavos por 39¢.

9. Quantos objetos de 50 centavos podem ser comprados com $1.00 e quantos centavos sobrarão?

10. Com $2.50? **11.** Com $8.75? **12.** Com $5.00? **13.** Com $1.25?

14. Em quantas semanas poderá você economizar $21.00, se economizar 12¢ por semana? **15.** Se economizar 25¢ por semana? **16.** 28¢ por semana. **17.** 75¢ por semana?

Achar os quociente e os restos:

100 | 23	750 | 96	520 | 87	500 | 62	300 | 36
125 | 48	200 | 24	225 | 35	682 | 93	600 | 85
350 | 42	500 | 78	400 | 52	125 | 35	250 | 38
715 | 85	100 | 44	250 | 66	500 | 53	625 | 84

DIFICULDADES INERENTES AO USO DE ZERO

Os adultos gostam de ver zeros nas suas contas, porque os zeros facilitam os cálculos. Dificultam, porém, a compreensão e o domínio dos processos. E', portanto, prudente tomar precauções especiais, quando o zero aparece em cena. Assim, embora nenhuma dificuldade encontre o aluno em diminuir 3475 de 5212, poderá ficar embaraçado ao ter de efetuar cálculos como $\begin{array}{r}5000\\-3475\end{array}$. Conquanto domine perfeitamente multiplicações como $\begin{array}{r}218\\\times 9\end{array}$, poderá encontrar dificuldade em casos como $\begin{array}{r}208\\\times 9\end{array}$, e não dispensará ensino adicional de casos como $\begin{array}{r}564\\\times 20\end{array}$, $\begin{array}{r}619\\\times 30\end{array}$ e $\begin{array}{r}225\\\times 40\end{array}$, embora tenha o domínio completo de $\begin{array}{r}514\\\times 2\end{array}$ $\begin{array}{r}691\\\times 3\end{array}$ $\begin{array}{r}225\\\times 4\end{array}$ e $\begin{array}{r}514\\\times 23\end{array}$ $\begin{array}{r}691\\\times 35\end{array}$ $\begin{array}{r}225\\\times 46\end{array}$; conhecimentos que ainda não serão suficientes para a solução de casos como $\begin{array}{r}564\\\times 207\end{array}$ $\begin{array}{r}691\\\times 305\end{array}$ e $\begin{array}{r}225\\\times 408\end{array}$. No aprendizado da divisão, novas perturbações devidas ao aparecimento de zeros no quociente, como em 1854 | 6 (309), e, principalmente, nas divisões longas como 5125 | 25 (50, 205, 125, 125); e, mais tarde ainda, nova série de complicações, em multiplicações de números como 0,054 ou 0,0028, e divisões cujo quociente exige precedência ou anexação de zeros.

Por duas razões importantes, encontram as crianças tanta

dificuldade no emprêgo de zero. Primeiro, 0 não faz parte das experiências infantis. Do ponto de vista da criança, não é um número como 2 ou 3 ou 4. Para ela zero não tem valor, *não adianta nada*. "5 × 5 centavos é igual 0 centavos", uma irrealidade, comparada com "2 × 5 centavos que faz um dime". 0, aritmèticamente, tem propriedades peculiares e requer um conjunto de hábitos próprios e àparte, como: 0 nas colunas de soma não se conta; qualquer número menos 0, não se altera; 0 vezes qualquer número = 0; qualquer número dividido por 0 = 0.

Segundo, não há uniformidade nas operações com zero. Em 1818 | 6, não escrevemos 03 na primeira divisão de 18, mas o fazemos na seguinte. Em 21 | 3 não escrevemos 07, mas em 0,21 | 3 devemos escrevê-lo. Ao subtrair 625 de 625 apenas escrevemos 0 ou mesmo nenhum algarismo, mas em 3002 × 4 devemos escrever 00. Cada hábito formado tem de ser relacionado às condições particulares a que se destinam. O seu uso inteligente exige maior compreensão do sistema geral de notação decimal e do valor relativo dos números do que o de qualquer outro número.

As dificuldades do emprêgo de zero podem ser reduzidas, por meio de experiências numerosas com 0, como eqüivalente de "nada" ou "nenhum" e pelo uso de formas longas, como

```
2134 | 7          715          56125 | 28
       0305       208          56      2004
                 ----          --
                 5720           1
                 000           00
                1430           --
                ----            12
                                00
                                --
                               125
                               112
                               ---
                                13
```


São também aconselháveis certas aplicações diárias da palavra *zero* em substituição de "nenhum", assim como, no caso de processos de aplicação prática pouco freqüente, como as divisões por números compostos e emprêgo de uma forma longa que utilize os hábitos familiares. A opinião geral, entretanto, discente da última, como método permanente. De qualquer maneira, lidar com zeros é difícil e sempre o será. O que devemos e podemos fazer é dar tempo e atenção ao domínio desta dificuldade.

DIVISÃO POR FRAÇÃO

Vimos em capítulo anterior que, aprendendo a dividir por fração, inteligentemente, o aluno tem de modificar a sua atitude para com a divisão, contrariando o hábito agora prejudicial de esperar sempre um resultado menor que o dividendo. Para isso, deve-se-lhe oferecer uma base e prática suficiente. Com ensino adequado, a dificuldade se reduzirá talvez a um quarto ou mesmo a um décimo, mas ainda assim é caso que requer consideração.

O tratamento apropriado para o caso consiste em substituir o hábito estabelecido, por hábitos mais adequados de pensar e agir, levando à compreensão e aplicação das regras:

Quando se divide um número por outro maior que 1, *o resultado é menor do que o número dividido.*

Quando se divide um número por 1, *o resultado é igual ao número dividido.*

Quando se divide um número por qualquer outro menor que 1, *o resultado é maior do que o número dividido.*

Quando o divisor é maior que 1, *o quociente é menor que o dividendo.*

Quando o divisor é 1, *o quociente = dividendo.*

Quando o divisor é menor do que 1, *o quociente é maior que o dividendo.*

A substituição se faz gradativamente por meio de exercícios como os que se dão ás páginas 206, 207 e 208.

Divisão por números menores que 1

1. Leia, substituindo os pontos pelo número conveniente.

A. Com 5¢ podem-se obter ... bolas a 5¢ cada uma.

Com 5¢ podem-se obter ... maçãs a $2\frac{1}{2}$¢ cada uma.

Com 5¢ podem-se obter ... doces a 1¢ cada um.

Com 5¢ podem-se obter ... bolitas de vidro a $\frac{1}{2}$¢ cada uma.

Com 5¢ podem-se obter ... bolitas de barro a $\frac{1}{8}$¢ cada uma.

B. $5 \div 5 = \ldots$

$5 \div 2\frac{1}{2} = \ldots$

$5 \div 1 = \ldots$

$5 \div \frac{1}{2} = \ldots$

$5 \div \frac{1}{8} = \ldots$

C. Em 4 pol. há ... o compr. de 2 pol.

Em 4 pol. há ... o compr. de 1 pol.

Em 4 pol. há ... vezes o compr. de $\frac{1}{2}$ pol.

Em 4 pol. há ... vezes o compr. de $\frac{1}{4}$ pol.

Em 4 pol. há ... vezes o compr. de $\frac{1}{8}$ pol.

D. 3 bolos = ... meios-bolos.
3 bolos = ... quartos.
3 bolos = ... sextos.

E. 7 dimes = ... níqueis.
7 dimes = ... centavos.

2. Leia substituindo os pontos pelo número conveniente.

A.	B.	C.
Em 8 há ... vezes 4	6 = ... vezes 3	$12 \div 6 =$
Em 8 há ... vezes 2	6 = ... vezes 2	$12 \div 4 =$
Em 8 há ... vezes 1	6 = ... vezes 1	$12 \div 1 =$
Em 8 há ... vezes $\frac{1}{2}$	6 = ... vezes $\frac{1}{2}$	$12 \div \frac{1}{2} =$
Em 8 há ... vezes $\frac{1}{4}$	6 = ... vezes $\frac{1}{4}$	$12 \div \frac{1}{4} =$
Em 8 há ... vezes $\frac{1}{8}$	6 = ... vezes $\frac{1}{8}$	$12 \div \frac{1}{8} =$

D.	E.
2 lb. = ... pesos de $\frac{1}{2}$ lb	$2 \div \frac{1}{2} =$
2 lb. = ... pesos de $\frac{1}{4}$ lb	$2 \div \frac{1}{4} =$
2 lb. = ... pesos de $\frac{1}{8}$ lb	$2 \div \frac{1}{8} =$
2 lb. = ... pesos de $\frac{1}{16}$ lb	$2 \div \frac{1}{16} =$

3. Faça o trabalho desta página.
4. Diga os quocientes que faltam.

A.	B.	C.	D.	E.
$1 = \ldots \frac{1}{2}$	$2 \div \frac{1}{2} =$	$3 \div \frac{1}{6} =$	$12 \div \frac{1}{2} =$	$2 = \ldots \frac{1}{4}$
$1 = \ldots \frac{1}{3}$	$2 \div \frac{1}{3} =$	$4 \div \frac{1}{5} =$	$5 \div \frac{1}{3} =$	$4 = \ldots \frac{1}{12}$
$1 = \ldots \frac{1}{4}$	$2 \div \frac{1}{4} =$	$6 \div \frac{1}{3} =$	$9 \div \frac{1}{4} =$	$3 = \ldots \frac{1}{12}$
$1 = \ldots \frac{1}{5}$	$3 \div \frac{1}{2} =$	$2 \div \frac{1}{8} =$	$3 \div \frac{1}{8} =$	$20 = \ldots \frac{1}{2}$
$1 = \ldots \frac{1}{6}$	$3 \div \frac{1}{3} =$	$5 \div \frac{1}{8} =$	$8 \div \frac{1}{2} =$	$5 = \ldots \frac{1}{6}$
$1 = \ldots \frac{1}{7}$	$3 \div \frac{1}{4} =$	$7 \div \frac{1}{2} =$	$6 \div \frac{1}{4} =$	$10 = \ldots \frac{1}{3}$
$1 = \ldots \frac{1}{8}$	$3 \div \frac{1}{8} =$	$10 \div \frac{1}{4} =$	$5 \div \frac{1}{2} =$	$8 = \ldots \frac{1}{4}$

Porém o caso não fica resolvido com a mudança de atitude relativamente ao quociente. Resta a vencer a dificuldade relativa à inversão da fração.

O tratamento desta questão é matéria para largas considerações. Os novos métodos reduzem a dificuldade (e várias outras), ensinando, concomitantemente, leis numéricas universais, mediante processo aplicável a qualquer caso de divisão de frações — divisor fracionário, dividendo fracionário e divisor e dividendo fracionário.

Ao invés do mero *truc* de "inverter", ensinam, como abaixo veremos, a lei geral de que *para dividir por qualquer número,*

basta multiplicar pela sua recíproca, (dando, é óbvio, a significação da palavra recíproca) regra que será, após o aprendizado das decimais, a base de economia de tempo para o cálculo de partes alíquotas de 100 ou $1.00.

Veja se aprende o seguinte:

$$2 \text{ é a recíproca de } \frac{1}{2}$$

$$3 \text{ é a recíproca de } \frac{1}{3}$$

$$4 \text{ é a recíproca de } \frac{1}{4}$$

Para dividir por uma fração, basta multiplicar pela sua recíproca.

$$\div \frac{1}{8} = \times 8 \qquad \div \frac{1}{4} = \times 4 \qquad \div \frac{1}{6} = \times 6$$

$$\div \frac{1}{12} = \times 12 \qquad \div \frac{1}{3} = \times 3 \qquad \div \frac{1}{2} = \times 2$$

1. Compare o resultado de $12 \div 3$ com o resultado de $12 \times \frac{1}{2}$.

2. Compare o resultado de $16 \div 8$ com o resultado de $16 \times \frac{1}{8}$.

3. Compare o resultado de $10 \div 2$ com o resultado de $10 \times \frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}$ é a *recíproca* de 2. $\frac{1}{3}$ é a *recíproca* de 3.

$\frac{1}{12}$ é a *recíproca* de 12. $\frac{1}{16}$ é a *recíproca* de 16.

4. Qual é a recíproca de 8? De 6? De 4? De 10?

5. Aprenda o seguinte:

$\div\ 2$ significa $\times \frac{1}{2}$ $\div\ 3$ significa $\times \frac{1}{3}$ $\div\ 4$ significa $\times \frac{1}{4}$

$\div\ 5$ significa $\times \frac{1}{5}$ $\div\ 6$ significa $\times \frac{1}{6}$ $\div\ 7$ significa $\times \frac{1}{7}$

Dividir por um número é o mesmo que multiplicar pela sua recíproca.

Procurar os quocientes. Representar por $\times \frac{1}{4}$, $\times \frac{1}{5}$, $\times \frac{1}{6}$, etc. $\div\ 4$, $\div\ 5$, $\div\ 6$, etc. Cancelar sempre que possível.

6. $\frac{9}{16} \div 3$. Escreva $\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{16} \times \frac{1}{\cancel{3}}$. $\frac{3}{16}$ é o resultado.

7.	**8.**	**9.**	**10.**
$\frac{8}{9} \div 4$	$\frac{3}{8} \div 2$	$\frac{9}{2} \div 3$	$\frac{1}{2} \div 3$
11.	**12.**	**13.**	**14.**
$\frac{15}{24} \div 5$	$\frac{1}{3} \div 4$	$\frac{2}{3} \div 5$	$\frac{3}{4} \div 3$
15.	**16.**	**17.**	**18.**
$\frac{5}{6} \div 7$	$\frac{16}{5} \div 8$	$\frac{10}{3} \div 5$	$\frac{3}{4} \div 9$

19.	**20.**	**21.**	**22.**
$1\frac{4}{5} \div 9$	$6\frac{2}{3} \div 10$	$4\frac{1}{8} \div 3$	$1\frac{2}{3} \div 5$

Em vez de $1\frac{4}{5}$ use $\frac{9}{5}$ Em vez de $4\frac{1}{8}$ use $\frac{33}{8}$ Em vez de $1\frac{2}{5}$ use $\frac{5}{3}$

1. Leia.

A recíproca de $\frac{1}{2}$ é $\frac{2}{1}$ ou 2. A recíproca de $\frac{1}{4}$ é $\frac{4}{1}$ ou 4.

A recíproca de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$. A recíproca de $\frac{3}{4}$ é $\frac{4}{3}$.

A recíproca de $\frac{2}{5}$ é $\frac{5}{2}$. A recíproca de $\frac{3}{5}$ é $\frac{5}{3}$.

A recíproca de $\frac{3}{8}$ é $\frac{8}{3}$. A recíproca de $\frac{5}{12}$ é $\frac{12}{5}$.

2. Diga as recíprocas de:

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$

$\frac{5}{8}$ $\frac{7}{8}$ 2, 3, 4, $\frac{7}{5}$ 5, 6 $\frac{3}{2}$ 24 $\frac{5}{12}$ $\frac{15}{8}$ $\frac{9}{12}$

Procure todos os quocientes. Multiplique pela recíproca. Cancele sempre que puder. Reduza os números mixtos a frações impróprias.

1.	2.	3.	4.
$32 \div 24$	$2\frac{1}{2} \div 2$	$6 \div \frac{1}{3}$	$3\frac{3}{4} \div \frac{3}{4}$
$32 \times \frac{1}{24}$	$\frac{5}{2} \times \frac{1}{2}$	6×3	$\frac{15}{4} \times \frac{4}{3}$

5.		6.	
$3 \div \frac{5}{8}$	Verifique o resultado, multiplicando por $\frac{5}{8}$.	$2\frac{5}{8} \div 1\frac{1}{2}$	Verifique o resultado, multiplicando por $1\frac{1}{2}$.
$3 \times \frac{5}{8}$		$\frac{21}{8} \times \frac{2}{3}$	

7.	8.	9.	10.
$50 \div 16$	$\frac{9}{16} \div \frac{3}{8}$	$\frac{2}{3} \div \frac{2}{9}$	$\frac{5}{6} \div \frac{5}{12}$
$50 \times \frac{1}{16}$	$\frac{9}{16} \times \frac{8}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{9}{2}$	$\frac{5}{6} \times \frac{12}{5}$

Ache os quocientes. Multiplique pela recíproca. Cancele sempre que puder. Reduza os números mixtos a frações impróprias.

1.	2.	3.	4.
$10 \div 6$	$4 \div \frac{2}{3}$	$4\frac{1}{8} \div 3$	$\frac{8}{5} \div \frac{2}{5}$

5.	6.	7.	8.
$2\frac{1}{2} \div \frac{5}{8}$	$9 \div 12$	$5 \div 25$	$\frac{3}{4} \div 3$

9.	10.	11.	12.
$100 \div \frac{4}{5}$	$\frac{3}{2} \div \frac{5}{6}$	$\frac{15}{16} \div \frac{1}{8}$	$10\frac{1}{2} \div 1\frac{3}{4}$

Lembre-se de que

Dividir por um número é o mesmo que multiplicar pela recíproca dêste número.

Desta maneira, o aluno adquire bastante prática em utilizar o divisor e, melhor do que pelos velhos métodos, fica impresso em sua mente o fato de que o divisor é o número que deve ser modificado.

RAIZ QUADRADA

A avaliação da raiz quadrada é difícil, mas assim se tornou, desnecessàriamente, pela confusão que se estabeleceu entre o aprendizado do processo e o aprendizado da prova dêsse processo, assim como pela importância que se lhe deu, como matéria de absoluta necessidade. E' melhor separar os dois assuntos, ensinando o processo, simplesmente, como meio de avaliar simultâneamente o divisor e o quociente de um dividendo dado, como se mostra às páginas 214 e 215.

De início, o aluno deve aprender a valiar a raiz quadrada, por um processo prático em que o seu guia será o seu próprio julgamento; depois, então, o processo sistemático. Êste será, provàvelmente, esquecido muito antes de que na vida se lhe depare uma necessidade de estimar uma raiz quadrada; porém aquele em que entrou em jôgo o seu próprio julgamento, tem todas as probabilidades de ser lembrado, aproximada ou completamente, ao menos, enquanto se recordar do que seja raiz quadrada. Se, ulteriormente

Avaliação da raiz quadrada

Se precisar saber qual é a raiz quadrada de um número, examine uma tabela de raízes quadradas. Estas costumam vir impressas nos manuais de mecânicos. Se não conseguir a referida tabela, procure determiná-la por si mesmo, experimentando e emendando até acertar.

E' conveniente experimentar um algarismo de cada vez, como segue:

Achar a raiz quadrada de 186.

186 | 13
13

Procure, primeiro, um número que multiplicado por si mesmo, dê aproximadamente 180. Por exemplo, pense "10 × 10 = 100. 10 é pouco. 20 × 20 = 400. 20 é muito. Logo, deve ser um número maior do que 10 e menor do que vinte, posso, portanto, escrever 1 no lugar das dezenas. Continue: 12 × 12 = 144. 12 é pouco. 13 × 13 = 169, 14 × 14 = 196. Deve ser mais de 13 e menos de 14. 14 é o número inteiro mais próximo". Se desejar um resultado mais aproximado, experimente 13,5 × 13,5, que faz 182,25. Ou 13,6 × 13,6, que dá 184,96. Experimente 13,7 × 13,7, que dá 187,69.

1. Pode-se economizar tempo, quando se avalia a raiz quadrada, fazendo uma pequena tabela dos quadrados dos números de 13 a 29.

Copie e complete a tabela seguinte para utilizá-la nos exercícios 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

13 × 13 =	17 × 17 =	21 × 21 =	25 × 25 =
14 × 14 =	18 × 18 =	22 × 22 =	26 × 26 =
15 × 15 =	19 × 19 =	23 × 23 =	27 × 27 =
16 × 16 =	20 × 20 =	24 × 24 =	28 × 28 =
			29 × 29 =

2. Suponhamos que esteja procurando os quadrados de 1,3 × 1,3, 1,4 × 1,4, 1,5 × 1,5, etc. Veja se pode encontrá-los, lendo a sua tabela.

3. Avalie a raiz de 350, utilizando-se de sua tabela. Faça-o, experimentando um número e multiplicando-o por si mesmo. Depois outro, até encontrar um que, multiplicado por si mesmo, dê um resultado entre 349 e 351.

4. Calcule pela sua tabela a raiz quadrada de 450. Corrija o seu cálculo até que o quadrado fique entre 449 e 451.

5. Feche o livro e procure por si mesmo a raiz quadrada de 186.

6. Avalie a raiz quadrada de 151 até o inteiro mais aproximado.

7. Avalie (no inteiro mais aproximado) a raiz quadrada de

a. 255 *b.* 318 *c.* 47 *d.* 85 *e.* 500 *f.* 632 *g.* 975.

8. Avalie a raiz quadrada de 32 até o décimo mais aproximado.

Avaliação de raízes quadradas até a segunda casa decimal

Achar uma raiz quadrada é quasi o mesmo que dividir, com a diferença de que só se tem o dividendo para começar e se tem de achar o divisor e o quociente, que são iguais.

Pode-se poupar tempo, na avaliação exata da raiz quadrada, efetuando-a do modo seguinte:

Para achar a raiz quadrada de 75 até a segunda casa decimal:

Pense em 8 × 8 e 9 × 9. Escreva 8 como primeiro algarismo da raiz.

Subtraia 64 de 75.

Baixe *dois* algarismos (00); ficam 1100.

Pense: quantas vezes 16 (2 × 8) está contido em 110.

110 | 16. Escreva 6 como segundo algarismo da raiz.

6

Pense "6 × 166 = 996".

Subtraia 996 de 1100.

Baixe *dois* algarismos (00). Ficam 10400.

Pense: quantas vezes 172 (2 × 86) está contido em 1040?

1040 | 172

6

Escreva 6 como último algarismo da raiz.

Coloque a vírgula no lugar conveniente. Tire a prova, multiplicando 8,66 × 8,66. Deve dar um resultado muito próximo de 75.

1. Achar a raiz quadrada de 62,4 até a segunda casa de dízima.

2. Achar a raiz quadrada de 9,94 até a segunda casa de dízima.
3. Achar a raiz quadrada de 38 até a segunda casa de dízima.

houver conveniência em que aprenda uma prova geométrica ou algébrica da raiz quadrada, pode-se ensinar-lha, como matéria de treino geral da matemática.

A explicação que damos abaixo, destinada a alunos do 8.º ano, para a maioria, não explica nem justifica o processo, relativamente a números que não sejam quadrados perfeitos, que é exatamente o que requer explicação e justificação. Copie o leitor esta explicação (no caso de querer procurar a raiz quadrada de 600 ou 650) e experimente dá-la a uma classe!

Ex. 1. Desejo dispor 625 ladrilhos de 1 pé quadrado em um pavimento quadrado. Qual será o comprimento de um dos lados do pavimento?

OPERAÇÃO

$$\sqrt{6.25} \mid 2$$

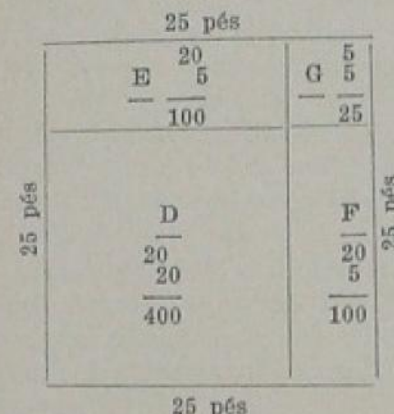
4 | 45 × 5 = 225
22.5
225

Devemos extrair a raiz quadrada de 625 para obter o lado do pavimento, em pés.

Começando à direita, divide-se o número em classes de dois algarismos. Procura-se, então, o maior quadrado contido na primeira classe à esquerda, 6 (centenas). E' 4 (centenas) cuja raiz, 2, se escreve no quociente. Como o 2 está no lugar das dezenas, o seu valor é 20 e representa o lado de um quadrado, cuja área ou conteúdo superficial é de 400 pés quadrados, como se vê na Fig. 1.

Fig. 1

Subtraindo êsses 400 pés dos 625, sobram 225 pés que devem ser somados a cada lado da Fig. 1, afim de que possa continuar quadrada. Temos, portanto, de dobrar a raiz 2 (dezenas) ou 20, um dos lados do quadrado, para obter o comprimento dos dois lados a serem aumentados, o que faz 40 pés. Depois inquirir quantas vezes 40, como divisor, está contido no dividendo 225 e dividir, o que dá 5 ou 5 vezes. Escreve-se o quociente achado, 5, no quociente da raiz, e também à direita do divisor. Êste número, 5, representa a largura das superfícies *E* e *F* a adicionar a cada lado do quadrado, como se vê na Fig. 2.

Fig. 2

A largura das superfícies adicionadas multiplicadas por 40, dão para conteúdo das superfícies aumentadas, *E* e *F*, 200 pés quadrados para cada uma. Para completar o quadrado, resta preencher o espaço *G*, cujos lados representados pelas larguras de *E* e *F*, medem 5 pés. Elevando 5 ao quadrado, achamos que o conteúdo da última superfície adicionada é igual a 25 pés quadrados. Em conseqüência do último aumento feito no quadrado, coloca-se o último algarismo da raiz no divisor; pelo que obtemos 45 pés que representam o comprimento total das superfícies adicionadas, o qual, sendo multiplicado pela respectiva largura (5 pés), último algarismo da raiz, dá o produto 225 pés quadrados, que é o conteúdo das três superfícies adicionadas, *E*, *F* e *G*, o que é igual ao resto da primeira operação da raiz.

Assim, achamos que o lado do pavimento mede 25 pés; donde, sendo 25 × 25 = 625, o número de ladrilhos será igual à soma das diversas partes da Fig. 2; ou 400 + 100 + 100 + 25 = 625.

A ilustração e a explicação precedentes são baseadas no princípio de que o quadrado da soma de dois números é igual aos quadrados dos números mais o dôbro do produto de um pelo outro. Assim, sendo 25 igual a 20 + 5, o seu quadrado será igual aos quadrados de 20 e 5, mais o dôbro do produto de 20 por 5, ou 400 + 2 × 20 × 5 + 25 = 625.

TEMAS PARA DISCUSSÃO

1. Citar alguns casos que sejam difíceis no sentido de exigirem muito exercício a bem de serem dominados.

2. Citar alguns casos que sejam difíceis no sentido de "difíceis de entender quanto ao que se tem de fazer".

3. Citar alguns casos que não sejam difíceis, mas longos e fastidiosos.

4. E' prática usada no comércio em geral (exceção feita de certos cálculos de custo), sacrificar a perfeita exatidão à facilidade, por exemplo, a prática de se desprezarem as frações de centavos. Em que facilitam essas práticas a avaliação de juros compostos? (Ver III, 59).

5. Citar alguns casos cuja dificuldade consista em relacionar um conceito exato a uma palavra.

6. Se um aluno sabe efetuar somas do segundo caso, sendo capaz de acertar 99 casos em cem, bem como de transportar corretamente 99 sôbre cem vezes, cêrca de quantos por cento de respostas corretas obterá, sem verificação, em contas de dez parcelas de cinco algarismos, como

65284
36956
97128
23807
72650
58175
82579
43196
38100
97374
——

7. Quantos por cento de resultados certos obterá em somas de cinco parcelas de cinco algarismos, como

31765
65294
97170
48684
30921
——, (sem verificação)?

8. Quantos por cento, em somas de cinco parcelas de dois algarismos, como

76
28
50
94
35
—, (sem verificação)?

9. Quantas parcelas deverá ter uma soma para que o aluno considerado não obtenha um só resultado correto, a não ser por acaso?

10. Criticar a prática seguinte: cumular o aluno de trabalho difícil sòmente no sentido de exigir repetição de uma simples operação, 999 vezes em mil, para certificar-se de oito ou nove respostas em dez.

11. O desconto bancário e as razões são dois tópicos tão famosos nas escolas pela dificuldade que encerram, que podiam ser arrolados entre as divisões longas, as dificuldades do emprêgo de zero, a divisão de fração e a raiz quadrada. Examinar o modo como é ensinado o primeiro (III, 146-149) e o segundo (II, 137 e III, 12 e 77-79), observando especialmente as definições usadas e os meios que se empregaram para estabelecer conexões entre desconto bancário e razão com a realidade a que são aplicados.

CAPÍTULO X

ALGUNS ERROS COMUNS

NÚMEROS CONCRETOS E NÚMEROS ABSTRATOS

Os velhos métodos faziam muita distinção entre aquilo a que chamavam números abstratos (4, 7, 25, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{8}$) e aquilo que denominavam números concretos (9 polegadas, 21 pés, 32 centavos, $4.75). Gastavam muito tempo a ensinar aos alunos regras baseadas nessas distinções, como "Só se somam e subtraem números concretos da mesma espécie. Na multiplicação, o multiplicador deve ser um número abstrato. O produto deve ser da espécie do multiplicando".

Os novos métodos consideram esta distinção de números concretos e números abstratos desaconselháveis ao ensino, e encontram muito melhores caminhos para atingir o mesmo fim. O que, realmente, importa é distinguir entre *números* (ou número abstrato, como os velhos métodos lhe chamariam) e *quantidade*, ou número de unidades de certa espécie. 4, 7, 25, $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{8}$ são números tão sòmente; 4 polegadas, 7 pés, 25 homens, $\frac{1}{3}$ de centavo e $\frac{5}{8}$ de uma coleção de 200 selos são quantidades. Aquilo que somamos, subtraímos, multiplicamos e dividimos são os números. Se se deseja saber quanto conteem ao todo sete caixas de giz, de 144 bastonetes cada uma, não se multiplicam

bastonetes de giz por caixas ou bastonetes de giz por 7. Multiplica-se 144 por 7. Pode-se tomar nota, mentalmente ou por escrito, das quantidades de que os números são expressão, afim de saber que quantidade representa o produto obtido. Assim, pode-se escrever $\begin{array}{r}144\\ 7\\ \hline\end{array}$ bastonetes de giz. Não se escreve "7 caixas", porque não altera a resposta ser o 7 caixas, sacos, pães, baldes, macacos, pregos ou dias.

Se se deseja conhecer, em libras, o pêso médio das seis meninas de treze anos de uma equipe de "basket-ball", do 7.º ano de uma escola de Chicago, sendo o pêso total de 138 lbs., divide-se 833 por 6, fazendo o que quer que seja para manter viva a lembrança de que o quociente representará libras. Visto que será preciso lembrar, também, que se trata de uma equipe feminina, composta de meninas de 13 anos, de determinado ano de uma escola de Chicago, seria, igualmente, admissível escrever a espécie da equipe, o sexo, a idade dos componentes, o ano escolar e a localidade, a que se refere a média de pêso $139\frac{2}{3}$ lb., assim:

6 meninas, 13 anos, 7.º ano, Chi., 838 lbs.

Opera-se com os números, tomando certas medidas, como é costume, para não esquecer que espécie de unidade representa o número resultante, em caso de, segundo as condições do problema, representar alguma quantidade.

As regras aquí ensinadas pelos velhos métodos eram úteis apenas, como meio de facilitar ao aluno o conhecimento da espécie a que deveria pertencer a resposta. Mas, mesmo sob êste aspecto, eram um tanto falhas, pois, para serem conseqüentes, deveriam exigir que o aluno resolvesse o problema: "Quanto custam 268 selos de 2¢?", assim $\begin{array}{r}2\\ 268.\\ \hline 16\\ 12\\ 4\\ \hline 536\end{array}$ E confundiam o aluno

por uma complicada casuística, pois que, a despeito de dizer-lhe que não devia multiplicar pé por pé, jarda por jarda, etc., (porque o multiplicador, segundo se ensinava, devia ser sempre um número abstrato) exigiam-lhe a resposta dos problemas de áreas em pé², jarda², etc., deixando o aluno a indagar por que processo misterioso se podia, então, chegar a tal resultado, visto que algo se devia fazer para isto.

Como princípios gerais, eram simplesmente falsos. *Pode-se* somar certo número de pés a certo número de polegadas, certo número de centavos a certo número de dólares, assim como se podem somar fatias de pão a bocados de manteiga. Grande parte das adições algébricas referem-se a operações desta natureza. *Pode* haver multiplicadores que representem quantidades, do mesmo modo que há multiplicandos desta espécie. Em "8 jardas = quantas polegadas?" o 8 representa jardas tão certo quanto o 36 representar polegadas. E' fora de dúvida, que não se somam pés com polegadas nem se multiplicam polegadas por jardas, segundo o uso rigoroso dos vocábulos em linguagem. Como se expôs acima, são os números que se somam, subtraem, multiplicam ou dividem. Entretanto, como de ordinário o povo usa palavras, *somam-se* centavos a dólares, *subtraem-se* acres de milhas quadradas e *multiplicam-se* polegadas por jardas.

Há duas aplicações de valor duvidoso, desta imprudente doutrina de números concretos e números abstratos. Primeiro, a afirmação de que só se podem somar ou subtrair "números semelhantes", isto é, números que representam quantidades da mesma espécie, ensinada como base da colocação das parcelas, unidades debaixo de unidade, dezenas debaixo de dezenas, etc., e a redução de frações ao mesmo denominador. Como doutrina geral é falsa tal afirmação. Podemos somar 4 centenas com 7 unidades; podemos somar $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$, sem pensar que $\frac{1}{2}$ são $\frac{2}{4}$. Não é aí que bate o ponto, não se trata de uma necessidade matemática, mas de uma conveniência prática. Do mesmo modo, parece muito melhor ensinar tudo isto, positivamente, como hábitos úteis, de preferência a ensiná-los na forma negativa: "Não se deve fazer isto de outra maneira".

A outra se refere ao modo de tratar as regras e as fórmulas de avaliação de áreas e volumes. Os velhos métodos dispendiam tempo precioso, ensinando que não se deve dizer ou pensar — milhas vezes milhas = milhas quadradas, pés vezes pés = pés quadrados ou outras maneiras de expressar compr. × larg. = área tratando-se de retângulos. O tempo que se deveria empregar em ensinar ao aluno o que fazer e como escolher unidades de medida, bem como expressar o resultado de acôrdo com a escolha, era malbaratado em esforços inúteis para convencê-lo de que não devia pensar em tais fórmulas de certa maneira. Êsses modos de pensar, a-pesar-de impróprios, talvez lingüisticamente, são aqueles que habitualmente utilizam as maiores intelectualidades do mundo científico, os melhores engenheiros e técnicos, em geral, e deveriam ser mantidos. Seria rematada pedanteria opor-se-lhes. De fato, o bom senso leva a melhor à pendanteria, mesmo com os velhos métodos, pois quando chega o momento de estudar o círculo, ensinam que a área do círculo é igual a $2 \times \pi r^2$. Ora, sendo o raio pé linear, raio ao quadrado será pé × pé, o que é igual a pé quadrado; donde se conclue que pé × pé é igual a pé quadrado no círculo, mau grado não o ser para o retângulo.

Os novos métodos poupam tempo efetuando exercícios que levam à compreensão da necessidade de uma escolha acertada, quanto ao uso corrente das unidades de medida e à interpretação dos resultados, como se mostra abaixo e às págs. 224 e 225.

Unidades de medida

Toda quantidade conhecida com a qual se comparam outras da mesma espécie para medir ou contar chama-se unidade de medida.

1. Leia, substituindo os pontos pela palavra conveniente, como se mostra nas duas primeiras linhas.

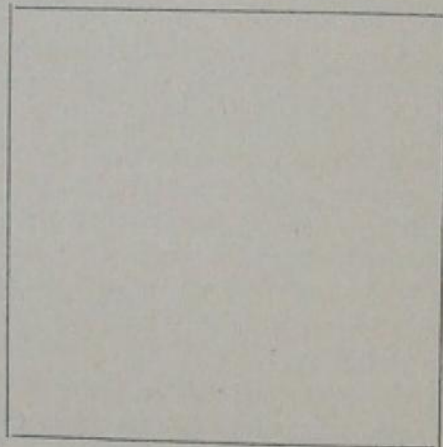
a. Meia milha vale $\frac{1}{2}$, quando se toma a milha como unidade de medida.

b. Meia milha vale 160, quando se toma o rod como unidade de medida.

c. Meia milha vale 880, quando se toma ... como unidade de medida.

d. Meia milha vale 2640, quando se toma ... como unidade de medida.

e. O quadrado ao lado valerá 2 × 2, se tomarmos ... como unidade de comprimento.

f. O quadrado valerá $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$, se tomarmos ... como unidade de comprimento.

g. Uma hora valerá 1, se tomarmos a ... como unidade de medida.

h. Uma hora valerá $\frac{1}{24}$, se tomarmos o ... como unidade de medida.

i. Uma hora valerá 60, se tomarmos o ... como unidade de medida.

Toda quantidade é múltiplo de uma espécie de unidade.

Assim, 9 mi. são 9 × 1 mi., $10\frac{1}{2}$ mi. são $10\frac{1}{2} \times 1$ mi., $3\frac{3}{4}$ lb. são $3\frac{3}{4} \times 1$ lb.

Quando tiver de procurar a área de qualquer superfície, reduza ambas as dimensões à mesma unidade de medida.

2. Preencha as lacunas.

a. Comprimento de um retângulo em ... × largura em ... = área em polegadas quadradas.

b. Comprim. de um retângulo em ... × ... = área em pés quadr.

c. Comprim. de um retângulo em jardas × ... = área em ...

d. Base de um paralelogramo em poleg. × altura em ... = área em ...

e. Base de um paralelogramo em milhas × altura em ... = área em ...

f. Base de um triângulo em pés × $\frac{1}{2}$ da ... = pés quadr.

g. Média dos dois lados paralelos de um trapézio × altura = área. Se as dimensões forem em pés, a área será em ... Se as dimensões forem em poleg., a área será em ... Se as dimensões forem em milhas, a área será em ...

(Sem lapis).

3. Quantos pés quadrados terá uma estrada de 2,mi.4 de compr. por 18 pés de larg., suposto que os seus lados são perfeitamente paralelos?

4. Quantas jardas de pano levará uma bandeira de 5 jardas de compr. e 10 pés de larg.?

5. A que fração da milha quadrada corresponde a área do parque abaixo?

Quando tiver de avaliar a capacidade ou o volume de uma caixa, caixão ou de outro sólido qualquer, reduza todas as dimensões à mesma unidade de medida.

6. De quantos pés cúbicos será a capacidade de uma celha de 10 pés de compr. 2 pol., 6 de larg. e 18 pol. de alt.?

7. Uma pilha retangular de lenha 4 × 4 × 8 pés eqüivale a 1 cord de lenha de 4 pés. Quantos cords de 4 pés haverá em uma pilha de 4 pés de larg., 4 pés de alt. e 24 jardas de compr.?

8. Quantas jardas cúbicas de terra se retiraram na excavação de um fôsso de 40 pés por 24 pés por 8 pés?

Ao resolver qualquer problema, pense no que significa unidade de medida.

9. O Expresso de Mercadores percorre 220 milhas em 4 horas e 24 min. O Continental faz uma milha em 80 segundos. Qual o mais rápido? Justifique a resposta.

10. Helena é capaz de somar 100 números de dois algarismos em 248 segundos. Alice pode somá-los à razão de 30 por minuto. Qual das duas meninas soma mais ràpidamente? Justifique a resposta.

As unidades de medida e a divisão

1. Leia, substituindo os pontos pelas palavras que faltam.

Para saber quantas vezes certa quantia está contida em outra, reduza ambas a centavos, ou a ...; depois divida.

Para saber quantas vezes certa área está contida em outra, reduza ambas à mesma unidade (ambas a pés quadr., ou a ... ou a ... ou a ... ou a ...) e divida.

Em qualquer caso, para saber quantas vezes uma quantidade é maior ou menor do que outra, reduza ambas à mesma unidade de medida.

(Com lapis).

2. Quantos brinquedos de 15¢ se poderiam comprar com $3.75?

3. Quantos galões de água caberiam em uma lata cúbica de 16 × 16 × 16 pol.? (1 gal. = 241 pol. cúb.).

4. Quantos pés eqüivalem a 28 por cento de uma milha e meia?

5. Quantas fôlhas de 1 pé por $1\frac{1}{2}$ pé se poderiam cortar de um rôlo de papel de 2 pés de larg. por 10 pés de compr.?

6. Quantos pés quadrados há num soalho de 4 jd. de compr. por $3\frac{1}{2}$ jds. de larg.?

Uso da forma equacional

Mencionámos alhures o grande valor da forma equacional com espaços em branco a serem preenchidos com números ou quantidades, como no exercício abaixo.

I

Dizer os números que faltam:

A.	B.	C.
... vezes 7 = 70	14 dias = ... semanas	35 = ... vezes 7
... vezes 7 = 63	70 dias = ... semanas	21 = ... vezes 7
... vezes 7 = 14	42 dias = ... semanas	14 = ... vezes 7
... vezes 7 = 28	21 dias = . . .semanas	28 = ... vezes 7
... vezes 7 = 35	49 dias = ... semanas	56 = ... vezes 7
... vezes 7 = 21	56 dias = ... semanas	42 = ... vezes 7
... vezes 7 = 49	63 dias = ... semanas	63 = ... vezes 7
... vezes 7 = 56	28 dias = ... semanas	49 = ... vezes 7

II

1.	25 pt. = ... qt. e ... pt.	9.	100 seg. = ... min. e ... seg.
2.	19 qt. = ... gal. e ... qt.	10.	15 pt. = ... qt. e ... pt.
3.	29 pés = ... jd. e ... pés	11.	15 pt. = ... gal. e ... pt.
4.	20 pol. = ... pés e ... pol.	12.	38 pt. = ... gal. e ... pt.
5.	9 gll = ... pk. ... gills.	13.	50 qt. = ... pk. e ... qt.
6.	35 qt. = ... pk. e ... qt.	14.	50 pk. = ... bu. e ... pk.
7.	20 ds. = ... sem. e ... dias	15.	200 min. = ... hr. e ... min.
8.	25 qt. = ... gal. e ... qt.	16.	30 dias = ... sem. e ... dias.

III

1. Ler, substituindo os pontos pelo número conveniente.

A.	B.	C.	D.
$16 = \frac{1}{\,}$ de 32	$8 = \frac{1}{\,}$ de 24	$2 = \frac{1}{2}$ de ...	$2 = \frac{1}{\,}$ de 48
$8 = \frac{1}{\,}$ de 32	$4 = \frac{1}{\,}$ de 24	$2 = \frac{1}{3}$ de ...	$4 = \frac{1}{\,}$ de 48
$4 = \frac{1}{\,}$ de 32	$2 = \frac{1}{\,}$ de 24	$2 = \frac{1}{4}$ de ...	$6 = \frac{1}{\,}$ de 48
$2 = \frac{1}{\,}$ de 32	$4 = \frac{1}{\,}$ de 24	$2 = \frac{1}{16}$ de ...	$8 = \frac{1}{\,}$ de 48

Preencher as faltas, como se fez nos dois primeiros exercícios. Reduzir as frações à expressão mais simples.

A.	B.	C.	D.
$9 = \frac{3}{4}$ de 12	$7 = \frac{1}{3}$ de 21	$23 = \frac{23}{24}$ de 24	$25 = \frac{5}{6}$ de 30
$16 = \frac{2}{3}$ de 24	$8 = \frac{4}{5}$ de 10	$10 = \frac{5}{8}$ de 16	$15 = \frac{1}{10}$ de 150
$2 = \frac{1}{2}$ de ...	$4 =$ ... de 16	$21 =$ ... de 24	$8 = \frac{4}{5}$ de ...
$2 = \frac{1}{3}$ de ...	$4 =$ ... de 8	$11 =$ ... de 12	$8 = \frac{2}{3}$ de ...
$2 = \frac{2}{3}$ de ...	$4 =$ ... de 6	$10 =$ ... de 12	$15 = \frac{3}{4}$ de ...

$3 = \frac{3}{4}$ de ...	$4 =$ ... de 10	$9 =$ ... de 12	$15 = \frac{15}{16}$ de ...
$3 = \frac{1}{2}$ de ...	$4 =$ ... de 5	$8 =$ ... de 12	$15 = \frac{5}{6}$ de ...
$4 = \frac{1}{2}$ de ...	$2 =$ ... de 4	$11 =$ ... de 16	$10 = \frac{2}{3}$ de ...
$9 = \frac{1}{3}$ de ...	$2 =$ ... de 6	$7 =$ ... de 8	$18 = \frac{9}{10}$ de ...
$10 = \frac{1}{2}$ de ...	$5 =$ ... de 15	$6 =$ ... de 18	$18 = \frac{1}{2}$ de ...
$12 = \frac{1}{2}$ de ...	$6 =$ ... de 8	$20 =$ ... de 24	$18 = \frac{3}{4}$ de ...
$12 = \frac{2}{3}$ de ...	$5 =$ ... de 10	$30 =$ ... de 40	$24 = \frac{4}{5}$ de ...
$12 = \frac{3}{4}$ de ...	$10 =$ ... de 15	$22 =$ ... de 24	$24 = \frac{3}{4}$ de ...
$12 = \frac{4}{5}$ de ...	$15 =$ ... de 20	$12 =$ ... de 24	$21 = \frac{7}{8}$ de ...

Estas formas deveriam ser relacionadas no espírito do aluno com a sua significação e com a atitude problemática, muito antes de ser êle iniciado em álgebra e ainda mesmo que jamais o tenha de ser. Qualquer criança, logo que haja aprendido a somar e subtrair, poderá efetuar com facilidade trabalhos, como os que segue:

Escreva os números que faltam:

$4 + 8 = \ldots$
$5 + \ldots = 14$

$$\ldots + 3 = 11$$
$$\ldots = 5 + 2$$
$$16 = 7 + \ldots$$
$$12 = \ldots + 5$$

A equação é a forma mais simples e uniforme, até hoje descoberta, de indicar uma questão quantitativa. E, aprendidas certas convenções de fácil entendimento, como sinais fracionários e parênteses, é susceptível de extensão infinita. Deveria ser empregada largamente no cálculo e resolução de problemas comerciais e, o seria, se o não obstasse o velho e gasto convencionalismo. E' a principal contribuïção da álgebra à vida comercial e industrial e uma das contribuïções que a aritmética pode também fazer. Economiza tempo, nos "drills" de simplificação de frações e outros.

Em páginas anteriores, já nos referimos à contribuïção que traz à solução dos problemas a prática de indicá-los sob a forma equacional e de armar equações generalizadas de problemas tipos, como os que se relacionam com preços, lucros, relações de tempo, distância e velocidade e outros.

Há ainda um terceiro campo onde as experiências com equações teem grande utilidade. Deixar de aproveitá-las aí, seria grande êrro. Referimo-nos às fórmulas geométricas. De ordinário, os professores consideram as fórmulas de áreas de triângulos, trapézios, círculos, etc., volumes de prismas, cilindros, esferas, etc., e de áreas da superfície de esferas, cilindros, etc. de maneira extremamente limitada. Olham-nas ou como fatos que devem ser memorizados para serem aplicados à solução de itens sôbre canteiros, depósitos, poços, medas, etc, ou como regras cuja dedução ou prova através de princípios geométricos constituem um belo exercício de raciocínio, ou ambos. Não as vêem como equações que devem ser interpretadas, como instrumentos de treino sôbre os elementos da representação simbólica geral. E fracassam, salvo incidentalmente, ao empregá-las dêste modo.

Consideremos a questão sob os três aspectos apontados. (1) Será útil ao aluno decorar fórmulas cuja significação não entende? Não nos parece. No que respeita à memória dos alunos

de escola elementar, parece muito duvidoso. Quantos de nossos melhores advogados, clérigos, comerciantes, cirurgiões, homens de estado, estancieiros, caixeiros ou donas de casa, ainda se recordarão das que aprenderam?

Dentre trinta graduados de escola elementar, nenhum terá na vida prática oportunidade de calcular a área de uma esfera ou o seu volume e si se apresentar a necessidade de conhecer a superfície lateral de um çilindro, não irá, estamos certos, medir segundo a regra, o diâmetro da base para aplicar a fórmula correspondente; muito simplesmente, passará um cordel ao redor do cilindro e fará o seu càlculo da mesma maneira, simplesmente. Relativamente ao mero conhecimento dos fatos, parece-nos, pois, bastante prudente, ficar aí pela circunferência, área do círculo e volume do cilindro, deixando o estudo de pirâmides, esferas e cones para os que se destinem a especialidades em que êsses conhecimentos sejam indispensáveis.

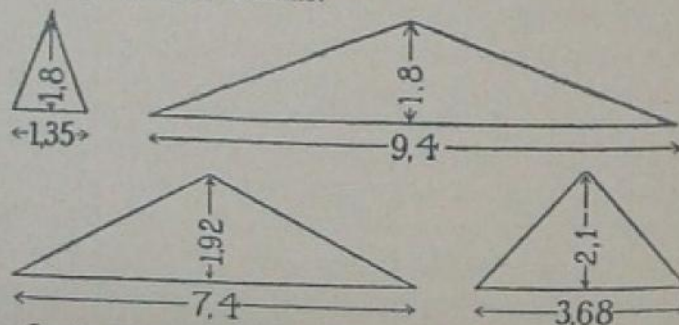
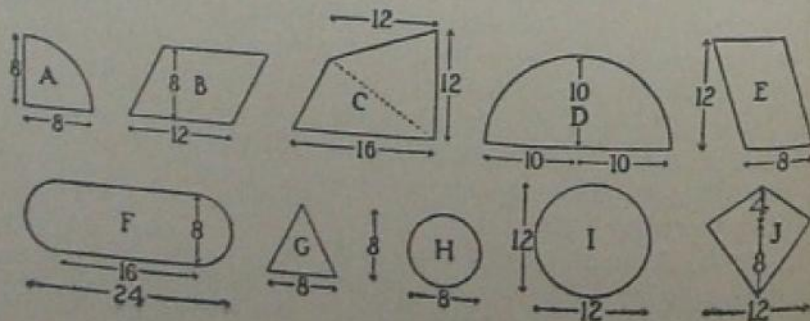
As deduções e provas mais fáceis de algumas fórmulas (notadamente as do paralelogramo e do trapézio) são exercícios intelectuais admiráveis para os alunos mais inteligentes. Mas aquelas que dependem da teoria de limites, são demasiado difíceis para todos, salvo poucos, pouquíssimos. Quantos mesmo de nossos leitores serão capazes de expor a dedução e a prova da área do círculo ($S = \pi r^2$) ou do volume da esfera ($V = \frac{4}{3} \pi r^3$)?

Não devem, então entrar, jamais os alunos em contacto com essas fórmulas? Se o seu único valor consistisse em serem memorizados e aplicadas ou demonstradas, deveríamos, sensatamente, omití-las, como o fazem certos programas radicais. Teem, todavia, real utilidade: Facilitam a compreensão do sentido da equação e oferecem ótimo meio de treino sôbre a aplicação das mesmas. Os novos métodos utilizam-nas para êste fim. O trabalho do aluno não consiste em armazená-las apenas mas simplesmente em lê-las, entendê-las e aplicá-las, tendo-as diante dos olhos. As menos comuns são tratadas exatamente da mesma maneira que as fórmulas que se usam para avaliar a resistência de vigas ou o arco de velocidade de uma roda, da mesma for-

ma pela qual se ensinam fatos como: "O pêso de 1 pé cúbico de água = $62\frac{1}{2}$ lb." ou "1 metro = 39,37 pol.". Em resumo, as fórmulas mais importantes, principalmente as da circunferência e do círculo, área do círculo e volume do cilindro, devem ser estudadas tanto pela sua significação, como para conhecimento permanente e aplicações. As menos importantes, ùnicamente, pela significação e pelo uso, por meio de exercícios da espécie dos que apresentamos abaixo e às págs. 233 e 234.

Equações

1. Que equação se costuma usar para achar a área de um triângulo?

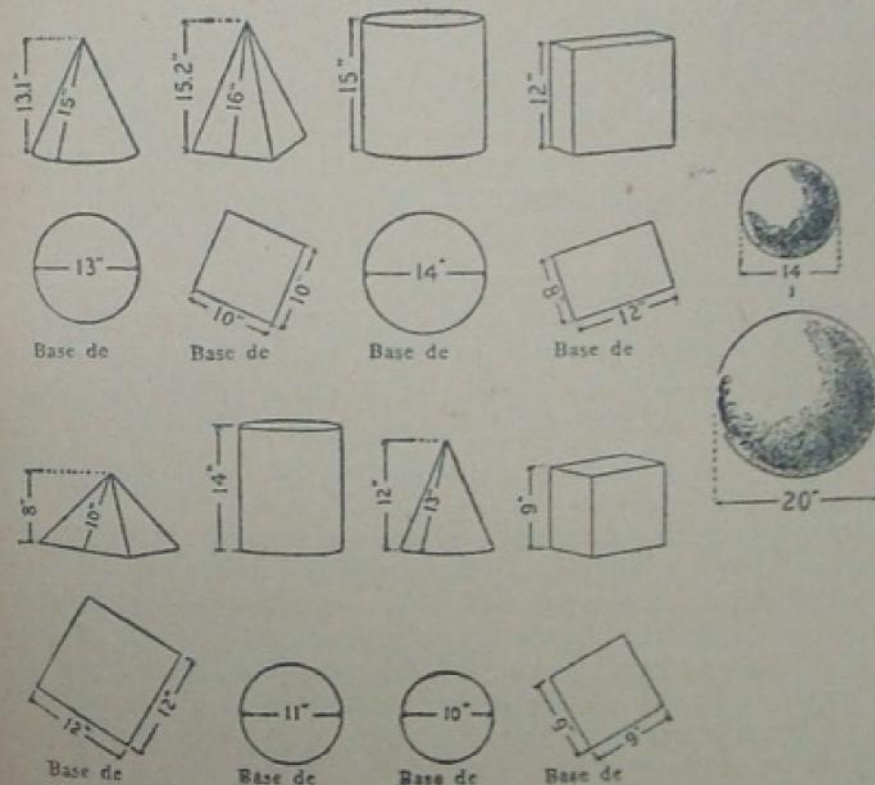
2. Procurar a área de cada um dos triângulos abaixo. As dimensões representam milhas.

3. Quais das superfícies abaixo teem a forma de paralelogramo? Quais teem a forma de setores? Quais se compõem de um retângulo e dois círculos?

4. Usar as equações abaixo na avaliação da área de cada uma das figuras acima.

As dimensões representam pés.

5. Usar equações conhecidas (ou as que o bom senso indique) para achar o perímetro de *A, D, F, H* e *I*.

Área do círculo = πr^2. *Área do paralelogramo = alt. × base.*

Área do setor = $\frac{1}{2}$ *r × arc. Área de qualquer superfície limitada por linhas retas = soma das áreas dos triângulos que a compõem.*

1. Usar as equações abaixo, na determinação do volume de cada um dos sólidos acima e da área das respectivas faces.

Cilindro, volume = *alt.* × *área da base.*

Cone, volume = $\frac{1}{3}$ *alt.* × *área da base.*

Esfera, volume = $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Pirâmide, volume = $\frac{1}{3}$ *alt.* × *área da base.*

Cilindro, superfície total = 2 × (*área da base*) + *alt.* × 2 π r).

Cone, superfície total = *área da base* + ($\frac{1}{2}$ *geratriz* × *circunf. da base*).

Esfera, superfície = $4\pi r^2$.

Pirâmide, superfície total = *área da base* + ($\frac{1}{2}$ *alt. de uma face* × *perim. da base*).

USO INDÉBITO DE "MULETAS"

Muitos professores empregam "muletas" ou métodos fàcilmente explicáveis e compreensíveis, mas que cedo ou tarde teem de ser suplementados por métodos melhores para aplicação eventual. Somar e subtrair, contando nos dedos, escrever a reserva, escrever os sinais +, — e ×, como índice de cálculo, em casos como $\begin{array}{r}568\\+321\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{r}568\\-321\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{r}568\\\times 321\\\hline\end{array}$, são exemplos comuns. Êsses professores deveriam aceitar o princípio: "Em igualdade de condições, é melhor não formar hábitos que tenham de ser substituídos". A questão está, porém, na desigualdade das condições. Neste caso, poderiam defender o uso da muleta, baseados em que o tempo que se poupa no aprendizado com a mesma, compensa o pouco que se gasta em substituí-la pelo hábito regular.

Freqüentemente, ensinam-se para uso permanente métodos que outros professores consideram importantes, se é que o

são, ùnicamente para uso temporário. A solução, neste caso, está em saber se o hábito terá de ser substituído mais tarde ou não.

Os professores são, em geral, tentados a fechar os olhos a essas conseqüências, sacrificando o futuro ao presente. Para fugir a alguma dificuldade inicial, criam graves embaraços aos professores dos anos mais adiantados. Cada escola, portanto, muito teria a lucrar, se adotasse uma política definida a respeito dêsse problema.

A tendência é de usá-las em demasia e por demasiado tempo. Consideremos, algumas das mais populares, aliás pouco entre professores, mas bastante entre os alunos.

Somar, adicionando as unidades, uma a uma, é uma muleta que pode ser usada na adição de inteiros, por poucos dias, para derivação de somas e, poucas semanas, como exercício de verificação das mesmas, para ser posta de lado, em seguida. Subtrair, diminuindo as unidades uma a uma, é muleta de todo condenável. A razão muito simples de tal condenação é que qualquer criança capaz de aprender aritmética pode perfeitamente aprender os fatos da adição e da subtração diretamente, em menor espaço de tempo do que requer o aprendizado com muleta.

Somar e subtrair, referindo os fatos a combinações familiares (por ex. 9 + 7 = 16, pensando "10 + 7 seriam 17, 9 é 1 menos que 10, logo 9 +7 = 16" ou 11 — 5 = 6, pensando "10 — 5 são 5, 11 é mais 1 do que 10, logo 11 — 5 = 6") pode-se chamar a isso inteligente perda de tempo. Perda de tempo, porque as crianças capazes de tais raciocínios poderiam aprender mais ràpidamente as combinações diretas. Inteligente, porque substitue um processo mais mecânico por um processo mais reflexivo. Pouco prejudicam, porque se aproximam do processo direto. O que se pode pôr em dúvida, entretanto, é que sejam mais fáceis de ensinar e aprender do que o processo direto.

Fazer acompanhar, nos livros ou no quadro negro, cada operação do sinal respectivo e ensinar a criança a escrever +, — ou ×, nos seus próprios cálculos, são práticas muito disseminadas, mas condenáveis. E' preferível escrever ao cabeço da página, coluna ou fila, "Achar as somas" ou "Achar as dife-

renças" ou "Achar os produtos", a pespegar um sinal a cada par de números. E' preferível obrigar o aluno a guardar de memória o que tem de fazer, como sucede aliás na vida corrente; pois, os hábitos devem se formar sob as mesmas condições em que hão de ser usados, em situações semelhantes às que a vida impõe e com as reações que a vida exige. A prática do uso dos sinais +, — e × foi adotada, de um lado, para facilitar o ensino das significações de somar, soma, subtrair, diferença, multiplicar e produto, e, de outro, para poupar o aluno ao trabalho de conservar em mente o que resolveu fazer de certos números. Será preciso recorrer à experimentação para um julgamento definitivo. Entretanto, pode-se assegurar não haver, em nenhum dos casos, economia apreciável de tempo e esfôrço que autorize a formação de tal hábito.

Escrever as reservas da soma é, talvez, a mais popular das muletas. Convirá a abstenção total do uso dessa muleta na vida e na escola? Convirá utilizá-la nos primeiros anos, ainda que tenha de ser abandonada mais tarde?

De um lado, pode-se considerar esta uma das melhores muletas, contanto que não venha a introduzir a novas fontes de erros ou a enfeiar os trabalhos, e que torne a verificação mais rápida, embora um tanto menos digna de confiança. De outro lado, as crianças podem aprender a somar sem muletas, mesmo no terceiro e no segundo ano, e ninguém ainda demonstrou que facilitem grandemente os primeiros exercícios. E' uma das questões que se podem debater indefinidamente, sem lograr solução. Só a experimentação poderá pronunciar a palavra decisiva, informando-nos até que ponto são úteis e até onde são prejudiciais.

Escrever números acima do minuendo ou do subtraendo, é processo quasi indefensável. Justifica-se, algumas vezes, ao começo, para tornar compreensível o processo. Se a forma empregada fôsse

```
  49 1         $50.25
$50.25   ou     20 7,
 19.67          19.67
 -----          -----
```

a confusão que traria à vista e à mente, a distração e a perda de tempo em que implicaria a interferência que teria na formação de hábitos ulteriores, seria muito maior do que o bem que poderia trazer, permitindo

o adiamento da dificuldade, para o momento em que o aluno tivesse atingido maior desenvolvimento e capacidade. Não haveria grave inconveniente em usar a muleta, como sucede na soma, se a alteração fôsse sempre de — 1 ou + 1, pois o aluno não teria de lembrar senão que deve fazer a alteração, sem ter de preocupar-se com o *valor* dessa alteração. Isto requer apenas a conservação em mente do que foi feito no passo anterior, o que parece um exercício bem razoável para alunos do terceiro ano.

O mesmo processo aplicado à multiplicação, é muito mais prejudicial. Escrever as reservas, neste caso, embora se permita fazê-lo em muitas escolas de excelente reputação, parece-nos um caso claro de miopia didática. Se o hábito não é eliminado antes de serem aprendidas as multiplicações "longas", vêem-se aparecer cálculos como os que mostramos abaixo, nos quais os olhos são distraídos por algarismos desnecessários e onde há freqüentes possibilidades de êrro.

```
  389            $325.00 | 0.47
  276                     -----
  ---               32     685
   55             2740
 2334             ----
  66              5100
 2723               53
 11               4795
 778              ----
 ---
```

Enquanto na adição, se escreve um algarismo "muleta" para uma série mais ou menos extensa de operações, na multiplicação se escreve um para cada operação, a não ser para os poucos produtos abaixo de 10 e para os finais de cada produto parcial. O tempo que se perde em escrevê-los e fixá-los em cada soma é apreciável. Como fator de verificação, pràticamente, não oferece vantagem, visto que não haveria conveniência em conferir os produtos, refazendo-os.

O hábito "regular" de conservar a reserva de memória e somá-la, mentalmente, não sòmente terá de ser adquirido algum dia, como oferece uma forma de treino específico em guardar fatos de memória, o que parece adequar-se muito bem a alunos de terceiro e quarto ano. O processo regular não é, em nenhum

sentido, mais difícil de entender ou menos indicativo do raciocínio geral do processo da multiplicação. E' mais difícil sòmente por exigir que o aluno mantenha sob contrôle maior número de fatos e relações.

Cumpre notar, ainda, que é muito difícil substituir o hábito-muleta pelo hábito regular ou, de qualquer modo, transformá-lo no último. Algumas muletas transformam-se em hábitos regulares, quer por mero abandono dos passos anteriores, quer por um processo mais lento em que vai sendo abandonada aos poucos, à medida que se vai adquirindo o novo hábito. O aluno que aprendeu a escrever a reserva em vez de retê-la no pensamento, terá de desprezar exatamente o que se acostumou a reter e reter o que estava habituado a desprezar.

Era uso quasi universal ensinar, no aprendizado da soma e da subtração de frações heterogêneas, a reescrever as frações, reduzindo-as ao mesmo denominador, mais ou menos como abaixo:

Somar	
$5\frac{1}{2}$	$\frac{4}{8}$
$9\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
$8\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$
$6\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$
$29\frac{3}{4}$	

Subtrair	
$27\frac{3}{4}$	$\frac{9}{12}$
$9\frac{1}{3}$	$\frac{4}{12}$
$18\frac{5}{12}$	

Para a espécie de somas e subtrações que costumavam ser ensinadas, era necessário e até mesmo indispensável muitas vezes fazer cálculos e cálculos para achar um denominador comum conveniente. No caso de ter o aluno de somar coleções raras,

como $\frac{}{2}$, $\frac{}{3}$ e $\frac{}{8}$ ou $\frac{}{2}$, $\frac{}{3}$, $\frac{}{4}$ e $\frac{}{5}$, deve-se estimulá-lo a apresentar qualquer trabalho razoável, contanto que fique assegurada a exatidão.

A moderna técnica do ensino, entretanto, emprega quasi todo o seu tempo em assegurar o domínio de adições e subtrações que tenham applicação prática. Seu método "regular" consiste em ensinar a somar $\frac{}{2}$ e $\frac{}{4}$ ou $\frac{}{2}$ e $\frac{}{3}$ ou $\frac{}{4}$ e $\frac{}{8}$ ou mesmo $\frac{}{2}$, $\frac{}{4}$ e $\frac{}{8}$, fazendo *pensar* nas frações como se estivessem reduzidas a $\frac{}{4}$ ou $\frac{}{6}$ ou $\frac{}{8}$ ou ao que importe ao caso; jamais exige que sejam reescritas. Levanta-se, porém, aquí outro problema: O que se costuma ter por hábito regular deve ser fixado como muleta? E' uma questão interessante, que devemos deixar ao cuidado do leitor resolver, chamando-lhe primeiro a atenção para certos fatos:

Uma resposta pode convir à adição e a resposta contrária, à subtração. Tratando-se de duas frações apenas, ambas de uso corrente, a escolha de um denominador comum, a redução mental das duas frações a êsse denominador e a subtração pelo emprêgo das frações lembradas não constitue tarefa muito difícil. Por exemplo, ninguém advogaria o uso da muleta, nos quatro casos seguintes:

$12\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$11\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$17\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$
$9\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$3\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{2}$	$\frac{4}{8}$	$6\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$

Quando, porém, há a somar uma dúzia de números em $\frac{}{2}$, $\frac{}{4}$ e $\frac{}{8}$, a tarefa cresce de muito, e uma muleta convencional do tipo abaixo pode ser digna de consideração:

$6\frac{3}{8}$

$$
\begin{array}{ll}
8\frac{1}{4} & \\
7\frac{5}{8} & 3 \\
 & 2 \\
 & 5 \\
 & 6 \\
9\frac{3}{4} & 4 \\
 & 5 \\
 & \overline{25} \\
5\frac{1}{2} & \overline{8} \\
2\frac{5}{8} & \\
\hline
\end{array}
$$

Tanto prejudica o aprendizado o uso de muletas, quanto combinações diretas, como:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{4} & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}
$$

De tudo quanto se disse sôbre as diferentes muletas, deveria ficar bem claro: primeiro, que as muletas variam muitíssimo em mérito ou demérito; segundo, que a objeção a fazer às muletas passíveis de tal, não consiste em julgar pueril escrever a muleta em vez de guardá-la em mente, mas em considerar que o tempo que fazem perder na formação de um hábito e sua substituição ulterior, é maior do que o que poupam de início e que mais enfraquecem o aprendiz do que facilitam o apr[illegible].

TEMAS PARA DISCUSSÃO

1. Considerar a definição e a regra seguintes: Chamam-se números semelhantes os que se aplicam à mesma espécie de unidade. Por ex., \$9 e \$43 são números semelhantes, \$9 e 43 centavos são números dissemelhantes. Só se podem somar números semelhantes e a soma é semelhante aos números somados.

Tentar a aplicação da regra citada à resolução do problema: "Um homem possue 7 cavalos, 9 vacas, e 23 ovelhas. Sua filha deu um nome a cada um. Quantos nomes ao todo?"

2. A que aplicações úteis se presta a regra dada? Que prejuizos pode trazer?

3. Consideremos a regra seguinte: O multiplicador deve ser considerado como número abstrato e o produto é da espécie do multiplicando. Que utilidade tem esta regra? Que prejuízo pode trazer?

4. Que devemos pensar da equação seguinte: "Número de volts vezes número de ampères = número de watts". Pode ser colocada dentro da regra citada em 3?

5. Citar práticas cientìficamente certas e incorretas conforme a regra.

6. Qual a finalidade dos exercícios seguintes?

I

Seja r = o número de milhas por hora de percurso.
d = a distância percorrida (em milhas).
t = o tempo (em horas).

Leia, claramente, o sentido das equações abaixo, substituindo as abreviaturas pelas palavras correspondentes. tr significa t vezes r.

$d = tr \qquad r = \frac{d}{t} \qquad t = \frac{d}{r} \qquad 3d = 3tr \qquad \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}tr$

II

Seja J = o número de dólares de juros.
P = o número de dólares em que o juro é pago.
I = a taxa anual.
T = o tempo em anos.

Quais das equações ou fórmulas seguintes estão certas?

$J = P \times I \times T$ $\quad J = P \times I \times P$ $\quad J = TIP$

$J = \frac{P}{I} \times T$ $\quad J = I \times P \times T$ $\quad J = \frac{1}{2}(P \times I) \times$ ...

III

Estude as equações ou fórmulas abaixo. Quando se a[...] capaz de aplicá-las, resolva os problemas 1 e 2.

Seja V = o arco de velocidade ou número de pés que [...] ponto determinado da circunferência de uma roda perc[...] por minuto.

$R. P. M.$ = o número de revoluções ou voltas completas [...] a roda faz por minuto.

r = o raio da roda, em pés ou fração de pé.

Assim $V = 2\pi r \times R.P.M.$

Logo, para achar o número de revoluções, por minuto, [...] cessárias para imprimir à roda certo arco de velocidade, [...]

$$R.P.M. = \frac{V}{2\pi r}$$

Seja p = o número de libras que uma viga pode suste[...] com segurança, estando o pêso distribuído uniformemente [...] bre ela.

l = a largura da viga (em polegadas).
g = a espessura (em pol.).
d = a distância entre os suportes (em pés).

Assim,
para uma viga de castanheiro $p = (120 \times 1 \times g^2) \div d$,
para uma viga de pinheiro da Geórgia $p = (200 \times 1 \times g^2) \div$

Sendo R = a resistência de uma corda de manilha (isto é, o número de libras que uma corda de manilha pode sustentar, sem rebentar).

$c = \frac{1}{2}$ do diâmetro da corda (em pol.).

$R = 720 \times$ o quadrado de $2\pi r$. Assim $R = 720\ (2\pi r)^2$.

Sendo Cs = uma carga (em libras) que a corda possa levantar à pequena velocidade.

R = a resistência da corda.

$$\text{Assim } Cs = \frac{R}{7} \text{ ou } Cs = \frac{720\ (2\pi r)^2}{7}$$

1. Qual será o arco de velocidade (em pés, por minuto) de cada uma das mós ou pedras de afiar representadas na pág. 217, a 750 revoluções por minuto?

[O desenho foi omitido aquí].

2. (a) Responder à mesma pergunta, considerando 1200 revoluções por minuto.

(b) Quantas vezes é o arco de velocidade da roda de 16 pol. maior do que o da roda de 10 pol.?

[Seguem mais problemas].

7. Comparar alguns dos exercícios a que faltam números a serem preenchidos com os mesmos sob a forma de perguntas (Ver II, 56, II, 119 ou II, 250 e outros, se o tempo permitir).

8. Fazer uma lista de quaisquer "muletas" aritméticas que tenha visto em livros ou empregadas por professores, exceção feita das que foram estudadas neste capítulo.

9. Citar duas ou mais cujas vantagens suplantem os prejuízos que possam causar.

10. Citar duas ou mais cujos prejuízos ultrapassem as vantagens que oferecem.

11. Considere o leitor o tópico: "Uso indébito de métodos abreviados". Escreva um capítulo curto ou parágrafo sôbre alguns dos métodos abreviados que costumam ser ensinados, mas que lhe pareçam representar desperdício de tempo, em se tratando de alunos de escola elementar. Considere, especialmente, certos expedientes empregados para abreviar a soma,

como reünir primeiro os números que possam formar dez[enas]
justas, para somar depois os mais, conforme se mostra a[qui]

3 2 4 7 9 8 —	10 + 10 + 9 + 4

e a multiplicação por 31, 41, 51, 61, etc., empregando uma [ou]
outra das formas

$$\begin{array}{r} 2184 \\ 31 \\ \hline 6552 \\ \hline 67704 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6552 \\ 2184 \\ 31 \\ \hline 67704 \end{array}$$

12. Um aluno que resolveu problemas como "Qual é [a]
área de um triângulo de $14\frac{1}{2}$ pol. de base e $5\frac{1}{4}$ pol. de [al-]
tura?" revelou-se totalmente incapaz de achar a área de [um]
triângulo recortado em papel. Qual teria sido o êrro do ensi[no?]

CAPITULO XI

ALGUMAS CONTROVÉRSIAS INSTRUTIVAS

Há três questões capazes de provocar entre professores de aritmética, disputas mais acesas e argumentação mais abundante do que uma dúzia de outros casos juntos. São elas: Deverá a subtração ser ensinada pelo método "subtrativo" ou pelo método "aditivo"? Na divisão por decimal, deve-se ensinar a mover a vírgula no dividendo e no divisor, tornando êste inteiro ou a separar à direita do dividendo tantas casas, quantas forem as casas de dízima do divisor? Deve-se permitir o uso de chaves para conferição de resultados?

As opiniões acham-se muito divididas em tôrno de cada uma destas questões e tão extremadas, como entre Republicanos e Democratas. Os partidários de cada facção chegam a apaixonar-se de tal modo, pela sua doutrina, que a adoção de um dos métodos, em uma escola, é, muitas vezes, causa de regular campanha. Esta, não raro, se acompanha de grande excitação e empolga de tal maneira os ânimos, que, infortunadamente, ficam, muitas vezes, relegados para plano inferior assuntos bem mais importantes.

Em qualquer dos três casos, uma discussão tendente a demonstrar a superioridade de um dos métodos não merece grande importância. O bom senso sugere que, quando a metade, aproximadamente, das pessoas que devem entender da questão, estão de um lado e pouco mais de metade, de outro, não deve haver grande superioridade de um ponto de vista sôbre o outro. Veremos que esta afirmação exprime a verdade, examinando os três casos em debate. Cada lado conta, mais ou menos, o mesmo número de pontos a seu favor. A demonstração da superioridade

de um ou do outro não se compara em importância com a necessidade de eliminar os problemas irreais, reduzir o esfôrço visual decorrente da cópia de números, estimular a verificação de cada novo processo, pelos processos aprendidos, buscar motivos para "drills" ou organizar os tópicos sob o ponto de vista das necessidades do aprendiz.

Nesses casos, é de supor que cada um dos processos contratados apresente certas vantagens. E aí está. Ao invés de nos pormos a questionar estèrilmente, esforçando-nos por demonstrar a superioridade de um, devemos procurar descobrir um terceiro que reúna algumas ou todas as vantagens de ambos. Êste caso aliás se assemelha muito àquele da expedição que, chegada à margem de um rio, dividiu-se em dois partidos, porque argumentavam uns ser preferível marchar até a ponte localizada a dez milhas a molhar-se vadeando a corrente, e outra ser melhor molhar-se um pouco a cansar-se e perder tempo em ir tão longe — quando era possível que se encontrasse um barco nas imediações!

Será, portanto, conveniente analisarmos estes três casos típicos de divergências de difícil solução, já pela esperança de acharmos melhor trilha, já como exercício de confrontação de vantagens.

DOIS MÉTODOS PARA O ENSINO DA SUBTRAÇÃO

Os dois processos usados para efetuar a subtração, consistem, em essência, no seguinte:

Método subtrativo

370520
160875
———
209645

Muda-se o 0 para 10. O 2 fica valendo 1. 10 menos 5 — 5
Muda-se o 1 para 11. O 5 fica valendo 4. 11 menos 7 — 4
Muda-se o 4 para 14 e o 0 para 10. O 10 fica valendo 9 e o
7 fica valendo 6. 14 menos 8 — 6.
9 menos 0 — 9
6 menos 6 — 0
3 menos 1 — 2

Método aditivo

370520
160875
———

O 0 passa para 10. 10 menos 5 — 5. O 7 passa para 8.
O 2 passa para 12. 12 menos 8 — 4. O 8 passa para 9.
O 5 passa para 15. 15 menos 9 — 6. O 0 passa para 1.
O 0 passa para 10. 10 menos 1 — 9. O 6 passa para 7.
7 menos 7 — 0
3 menos 1 — 2

O processo de "pedir emprestado" ou subtrativo, baseia-se no axioma de que somando e subtraindo o mesmo número ao minuendo, êste não se altera. O processo "aditivo" funda-se no axioma de que, somando o mesmo número ao minuendo e ao subtraendo, a diferença não se altera.

Observe-se que em ambos os métodos dizemos 10 menos 5 — ..., 11 menos 7 — ... 12 menos 8 — ..., etc. e não 5 e ... — 10, 7 e ... — 11, 8 e ... — 12. Poderíamos usar do mesmo modo, com acêrto, a forma 5 e ... — 10, 7 e ... — 11, 8 e ... — 12. Isto é, a escolha entre diminuir o minuendo e aumentar o subtraendo é inteiramente independente do ato de pensar nos fatos elementares da subtração (por ex em 2 — 1) seja como "2 — 1, 1, porque de 2 tirando 1 fica 1", seja como "2 — 1, 1, porque tendo 1 para ter 2 é preciso mais 1". Observe-se, ainda, que, embora pensemos na subtração "10, 5, 5" diretamente, sem qualquer pensamento de que 5 somado a 5 faz 10, podemos ter *aprendido originàriamente* "10, 5, 5", pensando "5 e ... — 10", e aplicar o conhecimento que temos da adição, para achar o resultado.

As discussões relativas aos métodos subtrativo e aditivo incluem, em realidade três questões diferentes:

(1) Devemos aprender as combinações da subtração com o auxílio das combinações da adição, usando a forma *a* + ... — — *b*?

(2) Assim sendo, devemos reter esta forma até que tenhamos aprendido a pensar no fato diretamente? Até chegar-

mos a pensar, quando subtraímos, só "10, 5, 5", "14, 6, 8", etc.
devemos pensar "5 e ... = 10", "6 e ... = 14" ou altern
em nossa linguagem interior, esta forma verbal para "10 me
nos 5" ou "5 de 10" ou ainda usar "5 e ... = 10 ou 5 para
10 = ?" ou "10 menos 5 = ... ou 5 de 10 = ...", segundo
o problema?

(3) Devemos diminuir no minuendo ou acrescentar no
subtraendo?

Procedamos por ordem.

Há vantagem em aproveitar os conhecimentos da adição
para facilitar a derivação das combinações da subtração, por
que poupa tempo e, o que é mais importante, estimula mais a
pensar ativamente do que a decorar ou contar. Há desvantagem,
porque o aluno pode confundir os processos, somando, quando
deve subtrair e vice-versa. "2 e quanto = 5?" é mais facil
mente confundível com "2 e 5 = quanto?" do que "5 menos
2 = quanto".

Parece que a grande maioria dos técnicos estariam a favor
do aprendizado inicial dos fatos elementares da subtração pela
derivação dos fatos da adição (auxiliado por subtrações objeti
vas) si se pudessem assegurar de que o aluno distinguiria, niti
damente, a subtração da adição, sendo capaz de dar-lhe nomes
apropriados, compreendendo tão bem que tal operação serve
para fornecer respostas a questões como "Perdeu, ficou" "Co
zinhou, comeu, ficou" "Ganhou, gastou, tem", etc. quanto a
"Quanto... é maior, mais velho, mais longo do que...?" Tem
deseja, deve obter" etc., e, em seguida, aprender a pensar nos
resultados da subtração diretamente, quando necessario. Com
ensino adequado, o emprêgo da forma "e... ou para" não cons
tituiria nenhum embaraço à obtenção de qualquer dêstes resul
tados. Um uso fanático da forma aditiva que limitasse a idéia
de subtração aos casos de achar o que falta para restabelecer o
equilíbrio, ou fracassaria na introdução do sinal menos ou dei
xaria o aluno desajudado, quando argüido: "Que fica quando
se tiram 7 de 13?" e casos semelhantes.

Em suma, parece haver saldo a favor do *aprendizado* das
combinações de subtração pela forma aditiva, desde que disso
nenhum prejuízo resulte para certos aspectos importantes do
aprendizado da subtração em geral.

Chegamos, agora, à segunda questão: "Convém reter a forma "e ... ou para" ou substituí-la por "menos ou de" ou permitir o uso de mais de uma forma verbal, até que tenhamos aprendido a pensar no resultado diretamente, pela própria situação, sem interferência de qualquer forma verbal?"

Antes de entrarmos em discussão, é melhor confessar lealmente, que não lograremos resposta segura. Há fôrças demais em conflito.

A subtração tem dois empregos principais. Em um conjunto de aplicações, é claramente um resto; em outro, uma diferença. O primeiro é o *que dá mais na vista*, o que mais impressiona, é o mais dramático; o segundo, o mais freqüente. Todos os restos podem ser considerados como diferenças, embora algumas vezes, com certo esfôrço de pensamento; as diferenças, porém, não podem ser concebidos como restos, senão com muito maior esfôrço. O têrmo resto, a maior parte das vezes, evoca problemas irreais. Assim, os casos: "Tive, perdi, ficou" "Fiz, comi, deixei", seriam respondidos, na realidade, não, contando os *tidos* e os *feitos*, nem contando o *perdido* e o *comido* e subtraindo, mas simplesmente contando as moedas e os bolos que ficaram. Na vida real, estes problemas se transformariam em problemas de diferença: "Tive..., Tenho agora... Devo ter perdido..." O *perdido* não é naturalmente pensado como resto, mas como a diferença. Similarmente, com "Fiz... Há agora... Comemos...". De fato, com exceção dos casos em que o minuendo e o subtraendo são ambos conhecidos sem cálculo, ou o minuendo é conhecido e o subtraendo menor que o resto, a determinação de restos reais pela subtração constitue uma imbecilidade.

Os problemas de diferença como: "Quanto ... é mais alto, maior, mais pesado, mais velho?" "Quanto custaria mais?" "Quanto devo economizar?" "Qual o meu lucro ou prejuízo?" e semelhantes, são muito mais numerosos e importantes na vida da criança e do adulto do que os problemas de resto.

Destas considerações isoladas, poder-se-ia concluir que, a ter de adotar uma só forma verbal, seria preferível a forma "e ... ou para", que se adapta muito melhor à idéia de obter uma diferença do que as formas *menos* ou *de* que se coadunam muito melhor à idéia de obter um resto. Entretanto, estas mes-

mas considerações podem ser aduzidas em defesa do uso de *ambas*. As duas idéias — achar a diferença em geral e achar a diferença, quando esta representa o que ficou de se haver tirado alguma coisa — são tão distintas que, pode-se dizer, deveriam corresponder a diferentes formas verbais. Não será bem empregado o tempo exigido para conhecer 15 menos 7 = 8 como eqüivalente em resultado a 7 e ... = 15, visto que o seu sentido "tirando 7, que fica?" se adaptará muito melhor aos problemas de resto e, com toda a certeza, será a forma por êles sugerida? Êste argumento põe em foco a questão geral de aprender a fazer uma só coisa por vários modos.

Muitos professores atacariam vigorosamente o ensino de uma dupla forma de pensar no fato "10, 5, 5". Exigiriam, logo, razões profundas que justificassem tal modo de proceder. Deveríamos todos aceitar, diriam, o princípio de que não se devem formar dois ou mais hábitos, quando um só basta. Mas nós poderíamos replicar que não se trata, aqui, de uma só coisa, que "10, 5, qual é o resto?" e "10, 5, qual é a diferença?" não podem ser tão bem manejados por um como por dois hábitos. Decida-se o que se decidir sôbre êste argumento, o certo é que o bom ensino da subtração requer adaptação a ambas as espécies de problemas, aos de resto e aos de diferença, especialmente aos últimos.

Qual pois, a forma a escolher, se uma só for adotada, e qual a predominante, se forem ambas adotadas? Quanto a nós perguntamos. "Qual a mais fácil para uso de crianças?" Aqui topamos com um êrro muito generalizado. Um adulto, quasi invariàvelmente, pensa que a forma pela qual aprendeu a pensar em determinado fato, é a mais fácil e mais "natural". Si aprendeu a pensar nos fatos da subtração sob a forma "menos ou de", insistirá em que os outros quando tenham de subtrair por ex. 5 de 10, pensem: "10 menos 5..." assim como pensam "10 mais 5..." quando somam. "O contraste facilita" dirá e talvez acrescente ingênuamente: "Seria simplesmente absurdo pensar nisto sob a forma "5, mais quanto para fazer 10?" Si aprendeu na forma "e ... ou para", insistirá em pensar na subtração sob a forma "10 menos 5 ou 10, tirando 5", quando já se sabe que 5 mais 5 fazem 10, é acrescentar carga antinatural ao aprendizado. E poderá ajuntar, tão ingênuamente, quanto o seu antagonista: "É tolice perder tempo e esfôrço, a procurar uma resposta quando já se conhece."

Ora, não há dúvida de que o modo por que temos praticado milhares de vezes, é sempre o mais fácil e o mais natural... para nós. Na realidade segundo testemunho da maioria dos professores, a forma "e... ou para" é quasi ou de todo tão fácil e natural para as crianças que aprendem por ela, quanto a forma *menos* ou *de* para aquelas que por esta aprendem.

Concluindo, parece haver saldo a favor da adoção da forma "e ... ou para" como forma verbal predominante e "regular", contanto que se acompanhe de prática abundante de problemas reais de resto, com verificação objetiva, e de exercícios como 10 — 5 = ..., 9 — 3 = ..., 16 — 7 = ..., em que se dê ao sinal a expressão verbal *menos* ou *de*.

Estamos, agora, de volta ao ponto de partida, a escolha entre os dois processos: diminuir o minuendo ou aumentar o subtraendo. Como se expôs, tal escolha é inteiramente independente do fato de pensar o aluno, dentro de sua experiência dos fatos da subtração, sob a forma verbal *e ..., para, de* ou *menos*.

Subtrair no minuendo tem a vantagem de oferecer maiores probabilidades à compreensão da natureza de nosso sistema de notação decimal e do valor relativo dos números. Aumentar no subtraendo traz a vantagem de facilitar um tanto a operação.

Para uma criança bastante inteligente, aprender a "pedir emprestado" uma dezena e trocá-la em unidades, pedir emprestado uma centena e trocá-la em dezenas, etc., eqüivale a receber uma lição valiosa sôbre o valor relativo dos números. Aprender a "pedir as dez unidades emprestadas ao minuendo" e "restituí-las" somando uma dezena ao subtraendo, constituirá uma lição que, embora possível, terá todas as probabilidades de não ser percebida. Não é o caso, de serem, as diminuições no minuendo como se proclama algumas vezes, uma conseqüência lógica de nosso sistema de numeração, e os acréscimos no subtraendo mero processo mecânico, que, por acaso, dá, invariàvelmente, resultado exato. Não é que um seja mais ou menos lógico do que o outro. O caso é que a lógica de guardar-se do êrro subtraindo de um número tanto quanto se lhe adicionou, é mais aparente do que a lógica de somar ao subtraendo o mesmo que

se somou ao minuendo. Provàvelmente. para maior número de crianças é mais compreensivel a primeira.

A maior ou menor facilidade oferecida pelo emprêgo de um ou outro dos dois processos é oriunda do fato de, em casos de zeros sucessivos no minuendo, exigir o primeiro a troca laboriosa de uma centena em 9 dezenas e 10 unidades ou de um milhar em 9 centenas, 9 dezenas e 10 unidades, e a conservação em mente de todas as trocas feitas, antes de começar a escrever, na resposta, um só algarismo correspondente, e exigir mesmo

o aprendizado de processos diferentes para $\begin{array}{c}30\\16\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{c}300\\16\\\hline\end{array}$, $\begin{array}{c}3000\\2116\\\hline\end{array}$, e o

segundo, o hábito único de somar um ao subtraendo, após cada adição de 10 ao minuendo. Como são muito comuns as subtrações com minuendos representados por números inteiros de dólares e por $10.00, $20.00, etc., o caso lembrado acima parece merecer consideração. De outro lado, temos de contar com os casos em que a adição de 1 se faz a 9, dando 10, o que exige do aluno o acréscimo de um 0 *não escrito* ao 1, causando certa confusão. Porém, convém notar que os casos de 9 na casa mais alta do subtraendo são muito mais raros do que os de zeros sucessivos no minuendo.

Seria precipitado proclamar que o processo de aumentar os algarismos do subtraendo seja essencialmente 5 por cento melhor ou 5 por cento pior do que o de diminuí-los no minuendo. Os modernos autores de compêndios dão preferência ao primeiro, porque parece levar uma leve vantagem essencial sôbre o segundo, e também, porque os professores que ensinam por êste método não sòmente dão atenção maior e mais acurada à operação do que às longas explicações sôbre as razões de pedir emprestado, como se mostram menos dispostos a permitir o uso de muletas escritas.

A esta altura, alguns de nossos leitores estarão admirados de que nenhuma referência tenhamos feito até aquí à questão de "trocos". Teremos omitido o mais forte argumento dos partidários do método aditivo — que é o método que tem de ser usado no mais comum de todos os usos da subtração? É verdade indiscutível que o trôco deveria ser feito, nas casas de negócio, pela soma de centavos, níqueis, dimes, etc. ao preço da

compra, até ser atingida a quantia dada em pagamento. É também verdade que o aluno que aprendeu na forma "e ... ou para", estará parece um tanto mais à vontade para achar o método correto de fazer troco. É ainda verdade que fazer troco facilita mais, de certo modo, o aprendizado da subtração e é de certo modo, mais facilitado por ela, se aprendemos a diminuir pensando sob essa forma "e ... ou para". Isto porém se restringe aos casos dos minuendos 5, 10 e 15, porque, em geral, fazer troco com moedas não é subtrair números, e o fato de, fazendo trôco com moedas, digamos tendo de retirar 17 cents de $1.00, acharmos conveniente somar 3¢, 5¢, 25¢ e 50¢, certamente, não implica em que devamos achar a diferença entre 17 cents. e $1.00, pensando: "17 e 3, 20; e 5, 25; e 25, 50; e 50, $1.00. Seria muito maior loucura do que fazer o trôco, pensando: "tirando 17 centavos de $1.00, ficam 83 centavos" ou "$1.00 menos 17 cents = 83" e tomando, então, 50 cents + 25 cents + 5 cents ÷ 3 cents, para perfazer os 83 cents. Se tivessemos apenas de dizer ao freguês o valor do trôco, ao invés de dar-lhe, e se êle nos entregasse não apenas moedas ou notas, mas cheques de $2.89, $4.15, etc. parece que seria bem inútil contar em ordem ascendente, aos centavos, em moedas de 1, 5, 10, etc. centavos, até perfazer o total. O que faríamos seria subtrair pelo método regular, a não ser em casos de diferenças pequenas.

Uma coisa é fazer trôco com moedas. Neste caso, temos de dar moedas dos valores de 1, 5, 10, 25, 50, 100, etc., cuja soma perfaz a diferença; não precisamos saber a quanto monta essa diferença. Coisa mui diversa é fazer uma subtração. Nesta, devemos conhecer a diferença expressa em número, isto é, numa seqüência de algarismos que representam unidades, dezenas, centenas, etc. Para fazer trôco, necessitamos conhecer apenas algumas combinações e na forma regular de soma $a + b =$ $= \ldots$ (*). Para subtrair, necessitamos conhecer todas as combinações e conhecê-las na forma $a + \ldots = c$ ou $c - a = \ldots$

(*) Duas outras combinações teem de ser conhecidas, isto é, $25 + 25 = 50$ e $50 + 50 = 100$.

Fazer trôco não é subtrair; é ir somando até alcançar certos pontos bem definidos. Fazer exercícios de trôco para atingir os pontos 5, 10, 15, facilita um tanto o aprendizado da soma e da subtração e, mais a esta, se ensinada, na forma "e ... ou para". Porém, avançar no início do aprendizado até os pontos 25, 50 e 100, pode ser muito *prejudicial* ao aprendizado da subtração, confundindo o aluno e interferindo no domínio do processo geral.

É fraco êste último argumento, como defesa do aprendizado das combinações da subtração pela derivação das combinações de soma e na forma "e ... ou para", e nada tem absolutamente a ver com o mérito de um ou outro processo aumentar no subtraendo ou diminuir no minuendo.

DOIS MÉTODOS PARA O APRENDIZADO DA COLOCAÇÃO DA VÍRGULA NA DIVISÃO DE DECIMAIS

Examinemos as duas regras:

A

Faça um sinal no dividendo tantas casas para a direita da vírgula, quantas forem as casas de dízima do divisor. Coloque a vírgula no quociente, imediatamente depois de dividir o algarismo do dividendo em que se ache o sinal.
Se o dividendo fôr inteiro, coloque uma vírgula à direita do algarismo das unidades e acrescente tantos zeros quantas forem as casas de dízima do divisor.

B

Transforme o divisor em inteiro multiplicando-o por 10, 100, 1000 ou 10000. Multiplique o dividendo pelo mesmo número e divida.

A primeira apresenta três leves vantagens: (1) Em negócios ou trabalhos científicos não altera a forma original dos itens. (2) Assegura a correta colocação da vírgula, ainda quando seja esquecida a regra da divisão de fração por inteiro. (3) A terceira vantagem será mencionada adiante.

A segunda apresenta as vantagens de ter enunciado mais

simples e ser, segundo se afirma, mais fácil de aprender, havendo surgido da dificuldade que encontravam os alunos em aplicar a primeira.

As opiniões acham-se divididas, igualmente, entre ambas. Esta controvérsia é proveitosa, porque, nos leva à conclusão de que na realidade, ambas não teem grande importância, nem atingem o ponto vital da questão. Calculistas profissionais não empregam na maior parte de seus trabalhos nem uma, nem outra.

O que importa é saber que (C) *Divisor × quociente deve ser = dividendo.* E por conseqüência (D) *O número de casas de dízima de divisor + o número de casas de dízima do quociente deve ser igual ao número de casas de dízima do dividendo.*

Na maior parte das divisões de decimais, não há necessidade de contar as casas de dízima antes de efetuar a divisão. Basta dividir os números como se fôssem inteiros e depois colocar a vírgula de modo a obter divisor × quociente = dividendo. Assim, por exemplo, sabemos que o quociente de 8,75|3,5 não pode ser 0,25 nem 25, mas 2,5; que o quociente de 87,5|3,5 não pode ser tão grande como 250, nem tão pequeno como 2.5. Sòmente em casos como 0,0875|0.035, 875|0,035 ou 0,0875|0.35, em que o divisor e o dividendo escapam a uma comparação rápida e segura, precisamos deter-nos para contar as casas de dízima.

Para o treino geral fundamental, da colocação da vírgula na divisão de decimais aquilo de que carecemos é de processos, como o seguinte:

1. Quantos minutos levará uma motocicleta para percorrer 12,675 milhas, a uma velocidade de 0,75 milhas por minuto?

```
12,675 |0,75
 7 5     16,9
 ---
 5 17
 ----
 4 50
   675
   675
   ---
```

2. Verifique, multiplicando 16,9 por 0,75.
3. Como sabe que o quociente deve ser maior que 1,69?

4. Como sabe que o quociente deve ser menor que 169?
5. Procure o quociente de 3,75 ÷ 1,5.
6. Verifique o resultado, multiplicando o quociente pelo divisor.
7. Como sabe que o quociente não pode ser 0,25 ou 25?
8. Observe esta operação: 7,5|0,25.

Como sabe que não pode dar 3,0?
Como sabe que também não pode dar 300?

Indique, em cada uma das contas abaixo, qual dos quocientes escritos é o certo.

9. 3,78|1,8
0,021—0,21—2,1—21 ou 210

10. 37,8|1,8
0,021—0,21—21 ou 210

11. 37,5|1,25
0,03—0,3—3—30 ou 300

12. 37,5|12,5
0,03—0,3—3—30 ou 300

13. 6,25|1,25
0,05—0,5—5 ou 500

14. 6,25|1,25
0,05—0,5— ou 500

Depois de haver o aluno aprendido, nos casos comuns, a examinar o divisor, o quociente e o dividendo para colocar a vírgula e a colocar esta, de jeito que divisor × quociente não dê um resultado absurdo, pode-se-lhe dar a estudar a regra D, que aplicará a dez ou doze quocientes, ajudando-se ainda da inspeção dos termos. Depois, pode-se-lhe apresentar a regra A ou D, como expediente útil, levando-o a verificar sempre os resultados, pela inspeção dos números até chegar à convicção da infalibilidade da regra. Então, passará a aplicá-la, toda vez que não fôr capaz de determinar a colocação, por simples inspeção. Ao aluno que assim aprender, nenhum prejuizo advirá, se vier a esquecer a regra. Mesmo porque não lhe será tão fácil esquecê-la, depois de a haver aprendido por si mesmo e por si mesmo se haver certificado de sua exatidão. Do mesmo passo, terá chegado à assimilação de princípios, o que é muito mais valioso do que a memorização de regras.

Ao aluno que houver aprendido as regras como meios de tornar o divisor × o quociente = o dividendo, a regra A oferecerá a sua terceira vantagem: Relaciona-se melhor com êsse princípio geral do que a regra B. Esta, entretanto, poderá adquirir uma vantagem especial, se formulada como em B_2.

B_2

Se ao simples exame dos termos, ficar em dúvida sôbre a colocação da vírgula, multiplique ou divida ambos por 10, 100, 1000, etc. até adquirir a certeza.

Assim, se se defrontasse com 0,0875|0,035, poderia mul-
25
tiplicar o dividendo e o divisor por 100, e, obtendo respectivamente 8, ... e 3, veria que o quociente não poderia ser senão 2,5; se com 875|0,035, multiplicaria ambos por 100 e, obtendo
25
mais de 80.000 e 3 ... saberia que o quociente teria de ser 25.000.

Quer a regra A, quer a regra B podem ser ensinadas; porém, depois do princípio essencial, que é a coisa capital a ser aprendida.

AS CHAVES

Aqui mais uma vez as opiniões estão, quasi igualmente divididas. Algumas escolas excelentes costumam fornecer chaves aos alunos; outras, igualmente boas proibem em absoluto, o seu uso.

Os argumentos principais invocados pelos partidários do uso de chaves, são: (1) que o aluno, indubitàvelmente, trabalha com mais prazer, quando possue meios de controlar o próprio trabalho; e (2) impede a continuação de trabalho já errado, evitando a formação de um mau hábito. Dois argumentos secundários são: (1) que poupam tempo, dispensando o exame de respostas; e (2) oferecem aos alunos mais fracos maiores probabilidades de se aproximarem do progresso exigido, pela reiteração de esforços na tentativa de acertar os trabalhos cujos resultados verifica pela chave estarem errados.

Os argumentos mais fortes contrários ao uso de chaves

são: (1) que alguns alunos não as usam apenas para verificar resultados, mas deshonestamente, para obter resultados, e (2) enfraquecem o espírito de persistência e auto-confiança, mesmo tratando-se dos melhores alunos, porquanto seria insensato esperar da natureza humana uma luta porfiada com provas e verificações próprias, quando lhe está ao alcance uma prova pronta para ajudá-la.

Não é de nossa intenção discutir, aqui, estes e outros argumentos. Queremos apenas chamar a atenção para o rumo que certos aspectos dos novos métodos podem imprimir à questão, e sôbre dois fatos de grande monta para os quais, tanto os adeptos como os adversários da chave, raramente, atentam.

Notemos, em primeiro lugar, que os novos métodos apresentam muito mais trabalhos com números baixos do que com números elevados, muito mais adições de poucas parcelas do que adições de muitas parcelas, muito mais frações de uso comum do que de uso raro, mais trabalhos com cálculos simples de emprêgo freqüente no comércio, do que com transações que envolvam quantias, tempos e taxas não usados. Segundo, que ensinam muito mais profunda e sistemàticamente a verificar o resultado, isto é, facilitam a verificação do trabalho e exercitam o aluno na prática de efetuá-la. Daí sentirem estes muito menos a falta de chaves, do que aqueles que aprendiam pelos velhos métodos. Terceira, os novos métodos preocupam-se muitíssimo mais do que o faziam os métodos tradicionais com a formação de capacidades definidas. A tarefa do aluno é enunciada de modo bem diverso. Onde os velhos métodos ordenavam "Fazer tais e tais exercícios" os novos métodos dizem "Pratique *até que possa fazer tudo,* (*) *sem êrro, em . . . minutos.*" Aqui se evidencia o mal do abuso da chave. O aluno trabalha para adquirir certa capacidade e não para obter certa quantidade de respostas. Se trabalha com cuidado suficiente, verificando os resultados independentemente, sabe que pode resolver o teste. Se confia demasiadamente na chave, não saberá verificar, por si mesmo, seus trabalhos, ficará dominado por um sentimento

(*) Deve haver, entretanto razoável tolerância para certos lapsos e cochilos, porquanto até os melhores calculistas os cometem.

de auto-desconfiança e será levado ou ao fracasso ou ao desvirtuamento da chave, se a possuir.

Passemos, agora, aos dois fatos acima aludidos. Primeiro, dever-se-ia exigir *muito mais trabalho* das classes a cujos alunos se permite o uso de chaves, do que àquelas cujos alunos verificam independentemente os seus trabalhos. Por exemplo, tomemos a multiplicação de um número de três algarismos por outro de três algarismos, como $\begin{array}{r}469\\ \underline{325}\end{array}$. Comparemos os alunos de duas turmas a quem se dêem 20 contas, exigindo-se exatidão do produto e dos produtos parciais, permitindo a uma o uso da chave e a outra não. Suponhamos que todos os alunos que usem a chave sejam honestos, que não se aproveitem dela para esquivar-se à soma dos produtos parciais, ou mesmo para descobrir erros, mas ùnicamente para confrontar com ela o resultado final, e que refaçam todo a operação, se não conferirem. Suponhamos que os alunos que não usam chave, verifiquem, invertendo os fatores e multiplicando e só considerem um resultado satisfatório, quando a primeira verificação coincida com a original ou, não coincidindo, uma segunda verificação coincida com um dos dois resultados primeiramente obtidos.

Assim, ao fim do trabalho, os alunos que não houverem usado chave, terão feito de 150 a 200 por cento mais cálculos do que aqueles que tiverem trabalhado com ela, porque um aluno que erre, digamos, 6 das 20 contas na primeira vez e 2 na correção, usando a chave, terá feito em média 20 + 6 repetidas, + 2, ou sejam 28; não usando a chave, terá feito 20 + 20 em primeira verificação, + 6 reverificações, + 2, ou sejam 48, ou 171 por cento mais.

Quanto maior fôr o domínio do aluno sôbre o trabalho, tanto mais elevada será a percentagem. A percentagem exata dependerá também da razão existente entre o trabalho de verificação e o trabalho de primeira avaliação.

O professor deverá, pois, ao dar exercícios, levar em consideração o uso ou não uso de chaves. Em identidade de condições, os trabalhos a serem verificados pelos próprios alunos, devem ter uma extensão de meio a três quartos menor do que os que o sejam por meio de chaves.

O segundo fato, importante também e poucas vezes considerado pelos professores, é que as classes que usam chaves exigem maior número de testes e testes mais rigorosos, do que as classes que não teem licença de usá-las, porque, quando as incumbe a alunos não habituados a verificações independentes a inteira responsabilidade das respostas, deve-se assumir, igualmente, a responsabilidade de uma medida mais cuidadosa de seu aproveitamento.

TEMAS PARA DISCUSSÃO

Considerar as controvérsias abaixo, pesando as vantagens de cada lado. Se possível, traçar um plano que aproveite o maior número de vantagens de ambos.

1. Todo trabalho deveria ser feito, quando possível, sem lapis e sem papel.
   Os alunos deveriam escrever ao menos as respostas da maior parte dos exercícios e problemas que resolvessem.
2. A maior parte dos problemas deveriam ser organizados pelo professor, baseados na vida da comunidade.
   A maior parte dos problemas deveriam ser tomados de compêndios preparados por técnicos, em vista do máximo de interêsse e aproveitamento para a classe a que se destinassem.
3. Não se deveria ensinar a tabuada de multiplicar além de 10 × 10.
   Dever-se-ia ensinar a tabuada de multiplicar até 12 × 12.
4. Dever-se-iam ensinar as frações decimais como um caso especial de frações ordinárias, como frações com os denominadores 10, 100, 1000, etc.
   Dever-se-iam ensinar as frações decimais como uma extensão do sistema de numeração decimal, passando de milhares, centenas, dezenas, unidades a décimos, centésimos, milésimos, etc.

CAPÍTULO XII

TÊRMOS, DEFINIÇÕES E REGRAS

Semelhantemente às explicações, "drills" e problemas, os têrmos, definições e regras teem por finalidade facilitar o aprendizado da aritmética e a sua aplicação às necessidades da vida. Se o aprendizado dos têrmos *ordem* e *classe* não auxiliassem o aluno a ler, escrever e entender números, deveriam ser suprimidos, pois que a vida jamais lhe dirá: "Separe êste número em classes" ou interrogará: "De que ordem é o número 7 em 27.468?". O princípio guia do mestre deve ser auxílio não sòmente no que se refere à escolha de têrmos, definições e regras, senão também no que concerne à maneira de ensiná-los ao aluno, para que lhe sejam do máximo proveito.

TÊRMOS

Os novos métodos suprimiram muitos dos têrmos técnicos que costumam ser usados no ensino da aritmética. Por exemplo, os seguintes que estavam em uso, mais ou menos, freqüente, em 1900; *número abstrato, antecedente, base* (*empregado para designar o número sôbre o qual se avaliam juros*), *multiplo comum, fator composto, número composto, número complexo, número concreto, conseqüente, número incomplexo, denominação, juro exato, extremos, máximo divisor comum* (*ou o mais alto fator comum*), *menor múltiplo comum, números semelhantes, meios, notação, numeração, ordem, classe, têrmos* (*de uma razão*).

Os sete seguintes *acréscimo, altitude, hipotenusa, minuendo, percentagem, perímetro, subtraendo* foram conservados, porque continuando a ser empregados por professores e livros de

referência, o seu desconhecimento viria, indiretamente a servir de tropêço. Ensiná-los não toma muito tempo e, se o fizermos convenientemente, não confundiremos o aluno nem o estimularemos a usar palavras em vez de conhecimentos reais. Dos sete, talvez os piores sejam *minuendo* e *subtraendo*. Quasi ninguém, salvo professores, e quasi nenhum livro, a não serem aritméticas, os aplica.

Os únicos têrmos técnicos acrescentados pelos novos métodos foram *recíproca* e *número decimal mixto* (*). Entretanto, dão-se ao trabalho de ensinar a significação de certas palavras e expressões (em geral, não por definições, mas pelo uso correto em contextos que lhes dão sentido), como *junto, ao todo, ambos, tanto quanto, tantas vezes quantas, total, igual e iguais, dividido igualmente,* que o aluno necessita conhecer e talvez não haja aprendido nas suas experiências gerais, quer em casa, quer na escola.

Em suma, um têrmo deveria ser ensinado no momento em que fôsse necessário e, em regra, imediatamente à assimilação do próprio fato. A precedência do nome sôbre o fato pode arrastar à tendência de substituir o conhecimento pela memorização de palavras: e o seu adiamento, para muito depois do conhecimento do fato, fará que êste não tenha suportes convenientes onde fixar-se. Casos há, porém, em que o têrmo deve anteceder a experiência, vindo esta a seguir como resposta ao problema: "Que quer dizer...?". Em outros casos, é aconselhável transferir para mais tarde a apresentação do têrmo, especialmente, quando êste é um simples substituto técnico de uma expressão clara, porém, mais longa ou menos usada. Assim, *produto* em vez de "resultado da multiplicação" ou "resultado, quando se multiplica" pode ser ensinado só depois de aprendidas umas quatro ou cinco tabuadas. Do mesmo modo, *multiplicando* e *multiplicador* podem ser diferidos para o fim do 3.º ano e ser ensinados junto com *dividendo* e *divisor*. Pensando a criança, até aí ou mesmo até mais tarde, em "número multiplicado" e "número que multiplica" ou mesmo "número de cima" e "número de baixo", em nada será prejudicada. Todavia, os novos métodos evitam a linguagem infantil — os substitutos pouco precisos, grosseiros ou estranhos de têrmos técnicos, embora mais fáceis de entender no momento, como: "9, tirando fora 2" ou "9 perdendo 2". Não é difícil aprender o têrmo adequado, quando o próprio fato foi bem assimilado. Ademais, o conhecimento de têrmos precisos, isto é, de têrmos apropriados, facilita novas adquisições e maior aproveitamento, através das palestras dos colegas mais adiantados e da família e das referências que aparecem nos livros.

(*) Em rigor, não se pode dizer que foram acrescentados, pois teem sido usados, pôsto que não comumente.

DEFINIÇÕES

Definições não podem substituir experiências. A finalidade da definição é cooperar com a experiência do aluno e não substituí-la. Uma que outra vez, pode preceder a experiência, servindo-lhe de estímulo, preparação ou guia. Ainda assim, a definição deve, de ordinário, repousar em algumas experiências prévias que lhe dêem ao menos sentido parcial. De comum, acompanham a experiência ou a seguem, como um resumo conveniente ou representação taquigráfica da mesma. Assim, a definição de quociente deve seguir-se ao aprendizado dos fatos fundamentais da divisão e dos primeiros passos do processo da divisão de números de dois e três algarismos, as de *numerador* e *denominador*, depois do aluno haver operado com frações ordinárias em somas e subtrações.

As definições devem ser consideradas não só como o mobilamento final e aperfeiçoado da mente cuja educação completam, mas também como instrumentos de trabalho ou representações de idéias que se estão desenvolvendo. Como ficou esclarecido em capítulo anterior, tudo quanto o aluno aprende sôbre qualquer tópico deve ser verdadeiro, mas não carece de aprender tudo quanto é verdadeiro. Assim, depois de aprender a resolver problemas, por ex., sôbre áreas de canteiros (em pés), o aluno ficará sabendo que: "O número de pés quadrados que um canteiro contém, se chama área". Após experiências ulteriores, a definição de área se estenderá a mais alguns casos, e assim se irá ampliando e aperfeiçoando, até chegar à forma última, sintética e generalizada.

Observe-se que se teve o cuidado de não dizer que "área de um canteiro é o número de pés quadrados nele contidos e nada mais do que isto". As definições são subsidiárias do conceito, não êste das definições. Tudo quanto se disse no capítulo VI, sôbre a extensão e o aperfeiçoamento gradativo do conhecimento da significação, aplica-se às definições.

Visto que as definições só devem ser aprendidas, quando o seu conhecimento tenha utilidade real, é óbvio que não é preciso que tudo quanto se conheça seja pôsto em definição. Não seria de grande proveito, ao tentar-se aprender a jogar xadrez, ouvir ou ler definições de todas as peças, movimentos e combinações de movimentos. Não aproveitaria muito, quando se aprende a atirar, conhecer definições verbais de cada parte da espingarda e cada parte do alvo contra o qual se pretende atirar. Aquilo de que se necessita, em aritmética, é da capacidade de reagir corretamente diante de situações e fatos aritméticos e não da capacidade de discorrer sôbre êles em linguagem irrepreensível. Tal capacidade constitue apenas um aspecto, e não o mais importante, da capacidade de reagir. As reações correctas manifestadas em cálculos e nas soluções de problemas estão, em eficiência, para as reações dadas em definições, na razão, ao menos, de cem para um. Muitos fatos são e devem ser definidos na mente do aluno, não por palavras, senão pelas tendências de pensar e agir que se lhes associam.

Daí dedicarem os novos métodos muito menos tempo ao ensino de definições verbais do que os velhos métodos. Definições semelhantes às que apresentamos abaixo, sob a letra A, deveriam ser omitidas, porque o aluno adquire a capacidade de reagir corretamente ao fato expresso em cada uma, à revelia do aprendizado das mesmas. Definições análogas às que seguem, sob a letra B, deveriam ser omitidas, porque, em nenhum caso, seriam realmente úteis.

A

Notação é a arte de escrever números.

Numeração falada é a arte de enunciar números.

Toda grandeza usada para contar ou medir, chama-se unidade.

Algarismos são os caractéres que se empregam para representar os números.

Fração é uma ou mais partes iguais da unidade.

Adição é o processo pelo qual se acha um número igual a dois ou mais números juntos.

Divisão composta é o processo pelo qual se acha uma das partes iguais de um número composto.

Evolução é o inverso de involução.

B

Uma unidade é um.

Numero abstrato é o que não se aplica a determinada espécie de unidade.

Denominação é o nome de qualquer unidade de medida.

Números semelhantes são os que representam a mesma espécie de unidade ou a mesma espécie de grandeza.

Área de qualquer superfície é o número de unidades de área que esta superfície contém.

Tempo é uma porção medida de duração.

REGRAS

As regras deveriam, como as definições, decorrer da experiência do aluno, resumindo o que está aprendido ou esteja sendo aprendido sôbre certos itens em uma forma sintética de fácil memorização e cuja evocação possa, de futuro, servir-lhe de guia. Os velhos métodos faziam o aluno aprender a regra e, em seguida, operar de acôrdo com ela. Os novos métodos deixam que o aluno aprenda a operar de certo modo, segundo um preceito estabelecido ou sem êle, o que é preferível, para depois, então, exigir que exponha, o que aprendeu sob a forma de regra, que o auxiliará a fixar e evocar o aprendido e a adquirir novo conhecimento.

Assim, aos alunos que hajam aprendido os produtos de 10 × 1 a 10 × 9, para torná-los capazes de achar os produtos de 20, 30, 40, 50, etc., ... 90, por 1, 2, 3, ... 9, e de 200, 300, 400, etc., ... 900, por 1, 2, 3, ... 9, dão experiências em exercícios como os seguintes (pág. 266).

Preencha as faltas:

A. 10 × 4 = ...
10 × 8 = ...
10 × 6 = ...
10 × 3 = ...

B. 100 × 2 ou 2 × 100 = ...
100 × 5 ou 5 × 100 = ...
100 × 7 ou 7 × 100 = ...
100 × 4 ou 4 × 100 = ...

C. 10 × 2 = ...
100 × 2 = ...
10 × 7 = ...
100 × 7 = ...

Depois, a regra:

"Para multiplicar por 10, acrescenta-se 0.
Para multiplicar por 100 acrescentam-se 00".

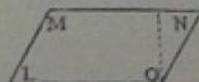
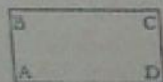
Finalmente exercícios e problemas que treinam o aluno em sua aplicação.

A regra de colocação da vírgula dos produtos de decimais deveria também ser ensinada, após copiosas experiências em casos em que a colocação dependesse tão sòmente de bom senso, em exercícios como:

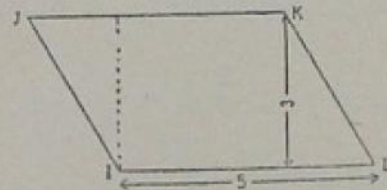
A distância de ida e volta da casa de Alice à escola é de 1,13 milhas. Que distância percorre Alice, fazendo 4 viagens? Tire a prova, somando quatro vezes 1,13.

Como se pode saber, olhando simplesmente, que o produto de $\begin{array}{r}1,13\\ 4\\ \hline\end{array}$ é maior do que 0,452 milhas?

Como se pode saber que é menor do que 45,2 milhas?

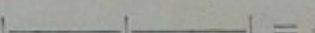
Do mesmo modo, a regra de avaliação da área do paralelogramo deve ser precedida de experiências, como as que se mostram abaixo e à pág. 267.

1. Procure papel quadriculado em polegadas quadradas. Recorte um retângulo semelhante a A B C D, porém com 6 pol. de base e 3 de altura. Recorte um paralelogramo semelhante a L M N O com as mesmas dimensões do retângulo. Qual é a área do retângulo?

2. Veja como o paralelogramo é bem do tamanho do retângulo, cortando a extremidade por onde passa a linha pontuada e ajustando os dois pedaços de modo a cobrirem o retângulo.

3. Faça um retângulo de 5 pol. de base e 3 pol. de altura ou altitude. Faça um paralelogramo igual a I J K L, com a mesma base e a mesma altura do retângulo, marcando-o como se indica no diagrama. Recorte-o, como fez anteriormente.

4. Compare vários retângulos de dimensões diversas com paralelogramos, respectivamente, de igual base e altura, até ficar convencido de que

A área de qualquer paralelogramo = a área de qualquer retângulo que tenha a mesma base e a mesma altura.

A área de qualquer paralelogramo = ao produto da base pela altura. Estas devem ser reduzidas à mesma unidade de medida, antes de efetuar a multiplicação.

Uma ou outra vez é preferível dar uma regra como guia e subsídio para a interpretação da experiência a dá-la como exposição do resultado dessa experiência. Surgem, assim, muitas vezes, em conexão com a verificação da regra experiências adicionais. Neste caso está o modo como se ensina, na página que segue, a regra de multiplicação de uma fração ordinária por outra.

Lembre-se que "$\frac{1}{2}$ ×" significa "$\frac{1}{2}$ de".

1. Que parte do dólar é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ de dólar?

2. Tire a prova, procurando o valor de $\frac{1}{2}$ de 50 centavos, e a que parte de 100 centavos correspondem 25 centavos.

3. A que parte da libra corresponde $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ de libra?

4. Tire a prova, calculando o valor de $\frac{3}{4} \times 8$ onç. e a que parte de 16 onças correspondem 6 onças.

5. A que parte de 1 pé corresponde $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ de pé?

6. Tire a prova traçando uma linha de $\frac{2}{4}$ de pé de comprimento e procurando determinar $\frac{2}{3}$ da mesma.

7. A que parte da dúzia corresponde $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ de dúzia?

8. Que parte da jarda são $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ de jarda?

9. Tire a prova, fazendo um desenho como o que se vê aquí.

Esta |————|————|————| = 1 jarda

logo esta |————|————| = $\frac{2}{3}$ de jarda

e esta |————|—— = $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ de jarda

Quando multiplicar por fração:

Escreva o produto dos numeradores no numerador e o produto dos denominadores no denominador. Sendo possível, simplifique.

Achar os produtos. Os resultados podem ser verificados por meio de desenho ou de uma régua graduada em pés.

A.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ pol. =

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ pol. =

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ pol. =

$\frac{1}{2} \times 1$ pol. =

$\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4}$ (ou $\frac{5}{4}$) pol. =

$\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2}$ (ou $\frac{3}{2}$) pol. =

$\frac{1}{2} \times 1\frac{3}{4}$ (ou $\frac{7}{4}$) pol. =

B.

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$ pé =

$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ pé =

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ pé =

$\frac{2}{3} \times 1$ pé =

$\frac{2}{3} \times 1\frac{1}{4}$ (ou $\frac{5}{4}$) pé =

$\frac{2}{3} \times 1\frac{1}{2}$ (ou $\frac{3}{2}$) pé =

$\frac{2}{3} \times 1\frac{3}{4}$ (ou $\frac{7}{4}$) pé =

C.

$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$ jd. =

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ jd. =

$\frac{3}{4} \times 1$ jd. =

$\frac{3}{4} \times 1\frac{1}{3}$ jd. =

$\frac{3}{4} \times 1\frac{2}{3}$ jd. =

$$\frac{4}{5} \times 1\frac{1}{2} \text{ pol.} =$$

$$\frac{4}{5} \times 1 \text{ pol.} =$$

[Segue-se uma página de verificação por meio de desenho e comparação de áreas].

Toda regra deve constituir parte de uma capacidade ativa e progressiva que vai ampliando a sua compreensão na razão direta do desenvolvimento da capacidade. Todas as regras ensinadas devem ser verdadeiras, mas não se deve esgotar logo às primeiras experiências toda a verdade sôbre uma operação. Os velhos métodos adaptavam o aprendizado a um conjunto de regras fixas. Os novos adaptam as regras ao aprendizado.

Assim, hoje, o aluno aprende nesta ordem: "Quando tiver de somar $\frac{}{2}$ e $\frac{}{4}$, pense que $\frac{1}{2}$ são $\frac{2}{4}$". "Quando tiver de somar ou subtrair $\frac{}{2}$ e $\frac{}{8}$, pense que $\frac{1}{2}$ são $\frac{4}{8}$". "Quando tiver de somar ou subtrair $\frac{}{2}$, $\frac{}{4}$ e $\frac{}{8}$, pense que $\frac{1}{2}$ são $\frac{4}{8}$, $\frac{1}{4}$ são $\frac{2}{8}$ e $\frac{2}{4}$ são $\frac{4}{8}$". "Quando estiver somando ou subtraindo $\frac{}{2}$, $\frac{}{3}$ e $\frac{}{6}$, pense: $\frac{1}{2}$ são $\frac{3}{6}$, $\frac{1}{3}$ são $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{3}$ são $\frac{4}{6}$".

De idêntica maneira, quando o aluno aprende a avaliar áreas de retângulos e volumes de sólidos retangulares, primeiro o faz com dimensões expressas na mesma unidade de medida, para aprender, depois que os casos mais gerais tenham aparecido, a regra mais geral: "Quando se multiplica para achar área, volume ou capacidade, devem-se reduzir as dimensões à mesma unidade de medida".

Ainda assim, o aluno do 4.º ano aprende primeiro: "Quando quiser saber quantas vezes certa quantia está contida em outra, escreva primeiro as duas quantias em centavos ou dólares; depois divida".

Meio ano mais tarde, esta simples advertência é substituída por:

"Quando o dividendo e o divisor representam dinheiro, devem-se reduzir ambos a dólares ou a centavos e dividir depois.

"Quando tanto o dividendo como o divisor representam medidas de comprimento, reduzem-se ambas à mesma unidade, polegadas, pés, jardas, rods ou milhas. Depois, divide-se.

Quando tanto o dividendo como o divisor representam áreas, reduzem-se ambos à mesma unidade, polegadas quad., pés quad., jardas quad., rods quad., acres ou milhas quad. Depois, divide-se.

Um ano após ou mais tarde ainda, generaliza-se:

"Para saber quantas vezes uma quantidade contém outra, antes de dividir, reduzem-se à mesma unidade".

Quando o aluno tem o domínio de uma operação resumido em uma regra, se o conhecimento desta não o auxilia a aprender alguma cousa mais, que proveito lhe trouxe o aprendizado da regra? Por que aprendê-la?

Os novos métodos não ensinam as regras pelas próprias regras. Seria supérfluo dar uma regra relativa à colocação do algarismo das dezenas v. g.: "Escreve-se o algarismo das dezenas à esquerda do algarismo das unidades", ou à escrita de um meio, v. g.: "Faz-se um traço, escreve-se 1 acima e 2 abaixo dêle", depois de haver o aluno dominado os respectivos processos. E' inútil dar regras, antes dos processos, pois a imitação e a prática, e não as regras, são eficazes. Se um aluno entendeu o sentido de percentagem e a significação de desconto, é desnecessário ensinar-lhe uma regra para calcular um simples desconto. Com descontos sucessivos o caso pode mudar bastante de figura.

As regras, semelhantemente aos fatos ou processos que encorporam em forma verbal, variam enormemente de importância. Algumas representam a verdadeira carne e o verdadeiro sangue da ciência e da arte aritmética; outras perpetuam apenas práticas úteis.

Tendo sido a matéria que se contém neste tópico discutida

no capítulo VI, bastarão alguns exemplos para aclarar a distinção entre uma e outra espécie de regras.

REGRAS ESSENCIAIS

Na subtração, o número menor mais a diferença deve ser igual ao número maior.

Divisor × quociente deve ser igual ao dividendo.

Para multiplicar um número por 10, acrescenta-se 0.

Para multiplicar um número por 100, acrescentam-se 00.

Para multiplicar um número por 1000, acrescentam-se 000.

Multiplicando ambos os têrmos de uma fração pelo mesmo número, a fração não se altera.

Dividindo ambos os têrmos de uma fração pelo mesmo número, a fração não se altera.

Para multiplicar por fração, multiplica-se pelo numerador e divide-se pelo denominador.

Para dividir por qualquer número, basta multiplicar pela sua recíproca.

A quantidade representada por um algarismo depende do lugar que êle ocupa.

Para saber quantas vezes uma quantia contém outra, reduzem-se primeiro à mesma unidade de medida.

Ao resolver qualquer problema, deve-se pensar sôbre o que significa unidade de medida.

CONVENÇÕES ÚTEIS

Deve-se começar a soma pela coluna da direita.

Deve-se somar cada coluna de baixo para cima e verificá-la de cima para baixo.

Para multiplicar qualquer número de dólares e centavos, deve-se multiplicar como se não houvesse a vírgula e representassem centavos, dividir o resultado por 100 e antepor-lhe o cifrão.

Para multiplicar por 5, multiplica-se por 10 e divide-se por 2.

Na multiplicação de decimal por inteiro, separam-se no produto tantas casas de dízima quantas são as casas de dízima do multiplicando.

TEMAS PARA DISCUSSÃO

1. Classifique o leitor as definições abaixo, relativamente ao grau de correção. Marque com um 0, as que lhe pareçam totalmente falsas; com um 4, as que lhe pareçam totalmente verdadeiras, e com 1, 2 e 3 as que representem graus intermediários.

Classifique-as relativamente ao grau de compreensibilidade. 0 deve significar que só dificilmente poderá ser entendida pelas crianças do ano indicado; 4 que o próprio leitor não poderia formular uma definição mais compreensível; 1, 2 e 3, os graus intermediários.

Classifique-as relativamente ao auxílio que possam prestar ao aprendizado. (E' óbvio que se uma definição obtiver o coeficiente 0 nos dois primeiros casos, correção e compreensibilidade, terá, também, 0, como auxílio, mas poderá alcançar 4 em compreensibilidade ou correção ou em ambas e ser de baixo coeficiente como auxílio). Empregue 0 para as que lhe pareçam incapazes de facilitar o aprendizado ou auxiliar a fixação de alguma noção útil; 4, caso julgue impossível formular outra melhor; 1, 2 e 3, para os graus intermediários.

2.º e 3.º *ano*

a. 0 quer dizer *nenhum.* 0 rapazes quer dizer nenhum rapaz. 40 quer dizer 4 dezenas e nenhuma unidade.

b. 0 chama-se *nada* e emprega-se para preencher as ordens vagas.

c. O algarismo 0 quer dizer *nenhuma coisa* para contar.

d. 0 quando está sòzinho, não tem valor.

e. Os outros nove algarismos representam cada um uma ou mais unidades e chamam-se algarismos significativos.

3.º *ano*

f. Multiplicação é o processo pelo qual se repete um número tantas vezes, quantas são as unidades de outro.

g. Multiplicação é o processo pelo qual se toma um número certo número de vezes.

h. Multiplicação é uma operação abreviada que serve para achar a soma de tantas vezes um número, quantas são as unidades de outro.

i. Multiplica-se, quando se procura a resposta para perguntas, como:

Quanto são 9 × 3?
Quanto são 3 × 32?
Quanto são 8 × 5?
Quanto são 4 × 42?

Se somamos 3 a 32, temos 35. 35 é a soma.

Se subtraímos 3 de 32, o resultado é 29. 29 é a diferença ou resto.

Se multiplicamos 3 por 32 ou 32 por 3, temos 96. 96 é o produto.

4.º e 5.º *ano*

j. Frações são números que representam unidades fracionadas.

k. As partes iguais em que uma coisa ou um número está dividido, chamam-se frações.

l. Número fracionário é o número de partes iguais em que está dividida qualquer grandeza tomada como unidade.

m. Partes iguais da unidade são frações.

n. Área é o número de unidades de área que dada superfície contém.

o. A área de qualquer superfície é a grandeza desta superfície.

5.º *ano*

p. Frações decimais são divisões ou subdivisões da unidade na razão décupla.

q. Números como 0,24, 0,07, 0,692, 0,8, 0,475, 0,2782 chamam-se frações decimais.

r. Fração decimal é uma fração cuja unidade está dividida em décimos, centésimos, milésimos, etc.

s. Fração decimal é um ou mais décimos, centésimos, milésimos, etc., escritos na mesma ordem dos inteiros.

5.º e 6.º *ano*

t. Adição é o processo que tem por fim reünir dois ou mais números em um só.

u. Classe é um grupo de três ordens de unidades contadas da direita para a esquerda.

v. Inteiro é o número que não é, no todo ou em parte, fracionário.

w. Números semelhantes são os que se aplicam à mesma espécie de unidade.

6.º *ano*

x. Linha é a extensão que só tem comprimento.

y. Todo nivel ou superfície plana limitada por quatro retas, chama-se quadrilátero.

z. Toda figura plana limitada por quatro linhas retas, chama-se quadrilátero.

aa. Retângulo é uma superfície plana que tem quatro lados retos e quatro ângulos retos.

bb. Retângulo é o quadrilátero que tem quatro ângulos retos.

6.º e 7.º *ano*

cc. Juro é o benefício pelo uso de dinheiro.

dd. Juro é a quantia paga pelo uso de dinheiro.

ee. Juro é a percentagem paga pelo uso de dinheiro ou valor recebido.

7.º e 8.º *ano*

ff. Razão é a relação existente entre dois números da mesma denominação, expressa pelo quociente da divisão do primeiro pelo segundo.

gg. Razão é a expressão da grandeza relativa de duas quantidades semelhantes.

hh. Razão é a relação por quociente.

2. Classificar cada uma das regras abaixo, segundo o gran

de correção, compreensibilidade e utilidade relativamente à facilitação do aprendizado, como se fez com as definições do Exercício 1. Classificá-las, também, segundo o grau de importância, empregando 0 para as regras que considere de quasi nenhuma importância; 4, para indicar que é uma das vinte ou trinta regras mais importantes da aritmética; 1, 2 e 3 para os casos intermediários.

3.º *ano*

a. Na leitura de números inteiros a unidade simples deve ser salientada na conciência.

b. Um milhão eqüivale a mil milhares.

c. Para ler números de três algarismos, enunciam-se as centenas, as dezenas e as unidades num todo de unidades.

3.º *e* 4.º *ano*

d. Regra para notação: Começar à esquerda, escrevendo os algarismos de cada classe na ordem apropriada, preenchendo com cifras as ordens e classes que faltem.

e. As unidades de cada classe valem 1000 unidades da classe imediatamente inferior.

f. Quando um algarismo é deslocado para uma casa à esquerda, fica representando 10 unidades de ordem imediatamente superior.

g. As unidades de qualquer ordem só podem ser subtraídas de unidades de ordem semelhante.

h. O número menor mais a diferença deve ser igual ao número maior.

i. 0 vezes um número é 0.

j. O multiplicador é sempre um número abstrato.

k. Para multiplicar por 10, acrescenta-se 0.

l. Para multiplicar por 100, acrescentam-se 00.

(Note-se que as regras *k* e *l* destinam-se aos anos 3.º e 4.º, antes do estudo das decimais).

5.º *ano*

m. Para subtrair um número mixto de um inteiro ou de outro número mixto, soma-se ao subtraendo uma fração que o

torne inteiro; soma-se a mesma fração ao minuendo; depois, subtrai-se.

n. Para subtrair números mixtos, subtraem-se primeiro as frações e depois os inteiros.

o. Para reduzir frações a determinado denominador comum, divide-se êste pelo denominador da primeira e multiplica-se o quociente pelo seu numerador; êste será o numerador exigido pela primeira fração. Do mesmo modo, acha-se o numerador de cada uma das outras.

p. Para elevar ou mudar uma fração para têrmos mais altos, multiplicam-se ambos os têrmos por 2, 3, 4, 5 ou qualquer outro número.

q. Para simplificar uma fração, dividem-se ambos os têrmos por 2, 3, 4 ou qualquer outro número menor.

r. Para somar frações, devem-se reduzir a frações semelhantes (se o não forem), e escrever a soma dos numeradores sôbre o denominador comum. A fração resultante reduz-se à expressão mais simples e, se fôr fração imprópria, extraem-se os inteiros, transformando-a em número mixto.

s. Para somar ou subtrair frações, reduzem-se ao mesmo denominador.

t. Para transformar um número mixto em fração imprópria, multiplica-se o inteiro pelo denominador e soma-se o numerador ao produto; sob a soma escreve-se o denominador.

u. Multiplicando ambos os têrmos de uma fração pelo mesmo número, a fração não muda de valor.

v. Para dividir uma fração por outra, reduzem-se ambas a frações eqüivalentes e divide-se o numerador da fração dividendo pelo numerador da fração divisor.

w. Para dividir uma fração por outra, inverte-se e multiplica-se.

x. Para dividir por fração, inverte-se a fração e multiplica-se.

y. Para dividir por fração, inverte-se a fração divisor e multiplica-se.

z. Para dividir por fração, multiplica-se pela sua recíproca.

aa. Qualquer alteração feita no dividendo, por multiplicação ou divisão, produz igual alteração no quociente; mas a

mesma alteração feita ao divisor, produz uma alteração oposta no quociente.

bb. O divisor vezes o quociente deve ser igual ao dividendo.

cc. O número de casas de dízima do divisor mais o número de casas de dízima do quociente deve ser igual ao número de casas de dízima do dividendo.

dd. Antes de começar a dividir, coloca-se uma *separatrix* (v) no dividendo, imediatamente depois do algarismo do dividendo que tem a mesma denominação do algarismo à direita do divisor. Quando, ao efetuar a divisão, se chega à *separatrix*, deve-se escrever a vírgula no quociente.

ee. Para chegar a um resultado correto na divisão de inteiros ou decimais, deve-se:

I. Procurar certificar-se de cada estimativa, antes de passar à seguinte.

II. Multiplicar cuidadosamente o divisor por cada dígito do quociente e escrever cada produto parcial no lugar conveniente.

III. Subtrair cuidadosamente e "baixar" o dígito ou dígitos correspondentes do dividendo.

IV. Colocar a vírgula no lugar conveniente.

A não ser que se seja extremamente cuidadoso, nas divisões longas, é preferível verificar cada resultado, multiplicando o quociente pelo divisor.

ff. "Por cento" significa "centésimos".

gg. "Quantos por cento de?" significa "Quantos centésimos de?"

"A quantos por cento de 60 corresponde 32?" quer dizer: "quantos centésimos de 60 são 32?"

hh. Por cento significa por ou em cada cento.

ii. Na avaliação de por centos, deve-se tomar cuidado em substituir os centésimos expressos com vírgula por *por centos* expressos pelo sinal %.

CAPÍTULO XIII

TESTES E EXAMES

FINALIDADE

Os testes e exames podem servir pelo menos, a sete finalidades diferentes:

(1) Para informar o professor da capacidade relativa dos alunos, de modo a poder ajuizar do grau de aproveitamento de cada um, no que concerne as capacidades testadas.

(2) Para informar o aluno de sua capacidade relativa.

(3) Para informar o professor da capacidade absoluta de cada aluno, revelando-lhe o que cada um é capaz de fazer, que dificuldades venceu e com que exatidão ou rapidez ou com ambas estas capacidades pode fazer certas coisas.

(4) Para informar o aluno de sua capacidade absoluta.

As expressões capacidade relativa e capacidade absoluta são aquí empregadas para exprimir, respectivamente, a posição do aluno com relação aos outros e a sua posição em relação à capacidade zero.

(5) Para estimular o professor a auxiliar a classe a melhorar a qualidade dos trabalhos.

(6) Para estimular o aluno a melhorar os trabalhos.

(7) Para treinar e examinar os alunos.

Qualquer pessoa capaz convirá em que os objetivos terceiro e quarto são mais importantes do que o primeiro e o segundo — que o progresso de um aluno em relação à capacidade zero e a sua posição passada é mais importante de medir e ser conhecido do que o seu adiantamento sôbre qualquer outro que lhe estivesse à frente anteriormente, ou a sua colocação abaixo de

algum e cuja frente houvesse estado precedentemente. A ordem de merecimento dentro de uma classe possue certo grau de interêsse humano, especialmente para aqueles que disputam a posição mais elevada; mas tal ordem, uma vez conhecida a capacidade absoluta de cada um, pode derivar desta. Esta, porém, não pode derivar daquela. A primeira mede o progresso e os resultados alcançados efetivamente; a segunda mede posições apenas.

Convirá ainda que a informação específica que auxilie o professor a conhecer minuciosamente as capacidades e os pontos fracos de cada aluno, é mais importante do que uma classificação geral, que simplesmente o informe do aproveitamento de cada um para efeitos de colocação. Pelos mesmos motivos, o aluno aproveita mais com o conhecimento específico de suas próprias capacidades do que com o conhecimento de um relatório mensal ou anual do preparo geral da classe.

Tomando em consideração os objetivos e fatos acima referidos, os novos métodos propuseram-se descobrir um instrumento aferidor do rendimento escolar mais sensível do que meras provas, mediante as quais o aluno, ano a ano recebe uma classificação total.

TESTES GRADUADOS OU TESTE "ESCALA"

Empregam, em primeiro lugar, testes que, começando com questões muito simples, vão progressivamente apresentando tarefas mais e mais difíceis, com tempo suficiente para permitir ao aluno o emprêgo de todos os seus recursos.

São dêste tipo o teste que segue e os que se encontram nas páginas 35 e 36.

ESCALA DE DIVISÃO

Comece no n.º 1 e vá subindo até o n.º 11, sem êrro. Quando o resultado fôr uma fração ordinária ou número mixto, reduza-o à expressão mais simples.

11. passo Procurar os quocientes até a terceira casa decimal:

a. 80|39,37 b. 6|11,25 c. 20,25|0,045 d. $293\frac{7}{8} \div 61,5$

10. passo Procurar os quocientes exatos:

a. 1200|2,5 b. 3,55|0,25 c. 20,25|0,045 d. 42,3|0,05

9. passo a. $6\frac{3}{4} \div \frac{3}{4}$ b. $\frac{1}{4} \div \frac{3}{8}$ c. $10\frac{1}{2} \div \frac{7}{8}$ d. $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ e. $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$

8. passo Substituir os pontos pelos números que faltam:

a. \$10 = ... × $66\frac{2}{3}$ ¢ b. \$25 = ... × $16\frac{2}{3}$ ¢ c. \$5 = ... × $62\frac{1}{2}$ ¢

d. \$50 = ... × 75 ¢ e. \$10 = ... × $37\frac{1}{2}$ ¢

7. passo Procurar os quocientes até a terceira casa decimal:

a. 390,6|16 b. 400|13 c. 859,15|14 d. 2941|35 e. 180,135|45

6. passo Procurar os quocientes exatos, em inteiros ou números mixtos:

Não continuar a divisão além do inteiro.

a. 1000|36 b. 725|18 c. 2000|24 d. 2500|16 e. 6075|17

5. passo Procurar os quocientes exatos:

a. 5h 9m|3 b. 10 pés 8 pol.|4 c. 8 lb. 2 onç.|5 d. 2 lb. 2 onç.|5

4. passo Procurar os quocientes e os restos. Não continuar a divisão além do inteiro.

a. 1499|7 b. 6310|9 c. 6458|8 d. 28236|6 e. 2705|5

3. passo Procurar os quocientes até centavos:

a. \$10.40|5 b. \$2575|7 c. \$15.00|9 d. \$36.00|8 e. \$10.00|6

2. passo Procurar os quocientes em inteiros ou números mixtos. Não continuar a divisão além do inteiro.

a.	b.	c.	d.	e.
740|20	1375|18	7500|40	72000|90	965|30

1. passo Procurar os quocientes e os restos. Não continuar a divisão além do inteiro.

a.	b.	c.	d.	e.
196|3	215|4	92|5	252|7	127|6

A organização dos exercícios em séries de dificuldades graduadas traz várias vantagens. Apresentando no começo questões muito simples, anima o aluno, que trabalha assim com melhor atitude. Oferece cinco oportunidades em cada passo, o que permite justeza de julgamento e uma distinção rápida entre a falta de conhecimento do processo e a falta de cuidado na execução da tarefa. (Uma ou duas respostas más em cinco, significa, pràticamente, conhecimento do processo; quatro ou cinco resultados maus, desconhecimento do mesmo.) Apresenta os trabalhos sob uma forma que, por si só, oferece 100 por cento de eficiência, como exercitação, naquelas tarefas de que o aluno se considera inteiramente incapaz. Estimula-o a progredir, mostrando-lhe que, se conhece bastante para acertar três questões em um passo, conhece suficientemente, para, com um pouco mais de atenção no trabalho e cuidado na verificação, acertar as cinco, visto serem todas do mesmo grau de dificuldade. Dá-lhe, assim, uma lição que se pode reforçar em qualquer grau, pelo método de classificação. Por exemplo, a classificação quanto à exatidão, dando-se um crédito de 0 por passo que tenha apenas uma ou duas respostas certas; um crédito de 2 por tres respostas certas, um crédito de 5 por quatro e um crédito de 10 pelas cinco respostas certas; um trabalho perfeito, nos cinco passos mais fáceis, valeria, assim, tanto quanto 80 por cento de correção em dez passos. Oferece adaptação eficiente às diferenças individuais. Os menos capazes não desanimam com tarefas em que nada podem acertar e os mais capazes não ficam limitados a repetições enfastiantes de coisas sabidas e ressabidas, pois se lhes pode permitir começar da metade ou do têrço superior do teste, creditando-lhes os passos anteriores, se conseguem acertar os mais difíceis. Finalmente, revelam ao mestre, ao simples exame dos "records" obtidos, os

pontos em que a classe toda e cada aluno, individualmente, carecem de treino mais prolongado.

TESTE INVENTARIO

Nos casos em que o trabalho não recaia em séries graduadas, do fácil para o difícil, os testes-escala podem ser substituídos por testes-inventários, nos quais cada passo apresenta uma espécie de trabalho ou conjunto de fatos da mesma natureza. Não são senão a sistematização das recapitulações que os bons professores costumavam fazer, de tempos a tempos. Abaixo apresentamos um exemplar simples:

REVISÃO

1. Somar 296 a cada um dos números seguintes:
   231 509 625 474 382 528 189 398
2. Subtrair 468 de cada um dos números seguintes:
   682 721 500 735 898 668 934 929
3. Multiplicar por 9 cada um dos números:
   78 106 54 29 27 45 111 110
4. Achar o quociente e o resto da divisão de cada um dos números seguintes por 6:
   472 976 800 608 849 675 550 345

TESTE DE VELOCIDADE

Em segundo lugar, aplicam testes de velocidade, mas em condições especiaes e com finalidade especial. Em regra são condições requeridas para a efetuação de testes de rapidez: (1) que meça um grupo de conexões específicas e (2) que o sistema de computação dos resultados seja tal, que elimine qualquer possibilidade de êrro. Visa obter informações sôbre se os grupos de conexões específicas testados (v. g. os fatos fundamentais da multiplicação) se fazem com perfeição suficiente para aplicação ulterior. A velocidade tem em si e por si mesma pequena significação, mas grande como sintoma de domínio de dificuldade. São utilíssimos como exercícios de treinamento, em

formas como esta: "Dizer os números que faltam. Praticar com êles até poder dizê-los todos, sem êrro, em três minutos."

TREINO PARA DESENVOLVIMENTO DA RAPIDEZ DE PERCEPÇÃO E ADAPTABILIDADE

Em terceiro lugar, os novos métodos esforçam-se por tornar as provas úteis ao desenvolvimento das capacidades de percepção rápida e adaptabilidade. Para isso, não devem apresentar as questões sempre do mesmo modo por que foram aprendidas ou recapituladas.

Os planos que seguem são de molde a interessar o aluno, exercitando-os, ao mesmo tempo, nessas capacidades.

Testes de seleção. Exercícios e problemas acompanhados de cinco ou mais respostas, entre as quais o aluno tem a certeza de encontrar a que convém, a qual só lhe cabe determinar.

Parte de um teste de "seleção", anos 6.º, 7.º e 8.º

$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	3	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	1
$33,6 \div 0,21$	0,016	0,16	1,6	16	160

1 Acre   5280 pés quad.   27225 pés quad.   43560 pés quad.
528000 pés quad.   4356 pés quad.

$\frac{4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3}{9 \times 8 \times 7 \times 6}$	7	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$

Teste de "acasalamento". Consta de duas séries de oito ou mais itens que se correlacionam, dois a dois. O trabalho do aluno consiste em indicar os fatos da série B que correspondem aos da série A. Por exemplo, a série A pode ser constituída de dez definições e a série B de dez casos que as exemplifiquem. Ou a série A de dez figuras geométricas e a série B das respectivas áreas. Ou a série A de dez enunciados e a série B de dez equações que os representem.

TESTE DE ACASALAMENTO, 8.º ANO

Escreva cada fórmula ao lado da expressão a que corresponda. Não esqueça que $\pi = \frac{22}{7}$. Descubra por si mesmo o que significam a, b, B, r e 1.

Diâmetro	$a \times b$
Circunferência	$\frac{1}{2} a \times b$
Área do círculo	$\frac{22}{7} \times a \times r^2$
Comprimento da hipotenusa	$\frac{22}{21} ar^2$
Área do triângulo	$\frac{B \times b}{2} \times a$
Área do paralelogramo	$2 r$
Área do trapézio	$\frac{44}{7} r$
Área do quadrado	$\frac{22}{7} r^2$
Volume do cilindro	$\frac{88}{21} r^2$
Volume da esfera	L^2
Volume do cone	$\sqrt{B^2 + b^2}$

Teste de lacuna. Consta de fórmulas equações, enunciados, etc., com palavras, números ou sinais a preencher.

Parte de um teste de "lacuna", 5.º ou 6.º ano.

Escreva as palavras, números e sinais que faltam.
Para multiplicar por fração, ... pelo numerador e .... pelo ....

Quando tanto o dividendo como o divisor representam dinheiro, reduzem-se ambos a .... ou .... Depois ....

Para .... por uma .... multiplica-se pela sua recíproca.

Teste de "identidade e diferença". Consta de pares de números, quantidades e expressões numéricas, que o aluno deve assinalar com um I ou um D, segundo os dois membros tenham ou não o mesmo valor.

Parte de um teste de "identidade e diferença", anos 6.º (fim). 7.º e 8.º

Examine os dois números, palavras ou quantidades de cada linha.

Escreva um I, se forem eqüivalentes.
Escreva um D, em caso contrário.

$16\frac{2}{3}$ ¢	um sexto de dólar
$4\frac{1}{2}$ por cento de	0,045 ×
$0,62\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$ de 100
0,4 ×	40 por cento de
$\$\frac{3}{4}$	75 ¢
$\frac{1}{8}$ de $\frac{2}{3}$ de	$\frac{1}{24}$ de

Teste de "verdade e falsidade". Consta de enunciados, fórmulas, equações, etc. que devem ser assinalados como verdadeiros ou falsos.

Parte de um teste de "verdade e falsidade"

Examine cada igualdade.
Escreva V, se fôr verdadeira.
Escreva F, se fôr falsa.

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

$$0,4 + 0,04 + 0,004 = 0,444$$

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{9}{8}$$

Qualquer dos testes citados podem ser aplicados como teste de "capacidade", para medir a capacidade do aluno em vencer dificuldades; como teste "inventário", para medir as capacidades adquiridas, ou ainda como teste de "velocidade", para medir a prontidão com que pode usar das capacidades adquiridas, sob as novas circunstâncias em que são apresentados os fatos.

TESTES PADRONIZADOS

Os novos métodos recomendam, também, a aplicação de testes estandartizados. Diz-se que um teste ou exame é estandartizado, quando

(1) é conhecido o grau exato de dificuldade que encerra ou
(2) é conhecido o grau exato de dificuldade que encerra cada um de seus passos ou
(3) são conhecidos os "scores" neles obtidos por alunos de diferentes graus ou
(4) são conhecidos os "scores" neles obtidos por alunos de diferentes idades ou

(5) são conhecidos os "scores" que se deveriam obter neles para adaptar os alunos a certos trabalhos específicos da escola ou da vida ou

(6) são conhecidos dois ou mais dos fatos enumerados.

Os testes de Courtis e Woody são os mais divulgados. O professor que com êles não estiver familiarizado, que procure fazê-lo. Os de Courtis (*) incluem testes sôbre as quatro operações de inteiros. (**) Os (***) de Woody são testes de "capacidade" sôbre as quatro operações de inteiros, de frações ordinárias, frações decimais e números complexos. Começam com as questões mais fáceis para ir subindo até as mais difíceis, que tenham probabilidades de ser oferecidas pela vida.

Dividindo os pontos alcançados por um aluno em um teste padronizado (× 100) pela média dos pontos aferidos para os alunos de sua idade, obtem-se o que se pode chamar o seu "quociente educacional" ou Q. E. Se a sua classificação fôr 16 e o padrão para sua idade 20, o seu Q. E. na capacidade particular testada, será de 80. Se a sua classificação for 26, o seu Q. E. será 130. Estes quocientes relativos a várias capacidades adquirem grande significação, quando correlacionadas com o quociente de inteligência global do aluno ou Q. I. obtido em teste apropriado de inteligência global. Por exemplo, suponhamos que os alunos A, B e C, obtiveram todos, em cálculo, um Q. E. de 100. Sendo os seus Q. I., respectivamente, de 100, 110 e 135, podemos concluir que A vai produzindo em aritmética o rendimento que seria razoável exigir-se de sua inteligência global, porém B já não produz o que seria justo esperar-se de seu quociente intelectual, e C, então, está dando um rendimento muito inferior ao que era de prever, dado o seu alto quociente intelectual. O aproveitamento a esperar de um aluno ou de uma classe está condi-

(*) Conseguem-se com S. A. Courtis, 82 Ellot Street, Detroit, Michigan.

(**) E testes subsidiários para interpretação.

(***) Encontram-se no Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, New York.

cionado de certo modo às suas aptidões naturais. A relação existente entre o Q. E. e o Q. I. ou $\frac{Q.\,E.}{Q.\,I.}$ é até certo ponto, uma medida da qualidade do esfôrço do aluno e do ensino que lhe foi ministrado. Quando o Q. E. não está ao nivel do Q. I., há, em regra, evidente necessidade de aperfeiçoamento em um ou outro. (*)

Relativamente aos padrões estabelecidos para cada idade e para cada ano escolar pelos testes de Courtis, Woody e outros, devemos lembrar que tais "standards" foram aferidos sôbre os resultados alcançados atualmente, isto é, resultados condicionados ao método usado e ao tempo gasto em atingí-los. Com o emprêgo de melhores métodos é de supor a elevação dêsses padrões ou a redução do tempo exigido pelo aprendizado, ou ambos. Em particular a exatidão dêsses padrões está ainda aquem do que podemos e devemos tentar pelo emprêgo de melhores métodos de ensino.

O TESTE DA VIDA

Os novos métodos estão em constante vigilância para defender o aprendiz contra o artificialismo das provas organizadas à base de questões raras, que na vida, só excepcionalmente se lhes deparem, e realizadas com o fim único de examinar e classificar alunos. Os testes que os novos métodos teem constantemente em vista são os do tipo daqueles com que o aluno se defronta ou defrontará em casa, na oficina, no comércio ou alhures, em correlação com a sua vida profissional, cívica e intelectual. Nos exames, como nas lições, os novos métodos dão preferência às situações que a vida mesma possa oferecer e às reações que a própria vida possa reclamar.

É incontestável que um trabalho pode ser útil como teste, e não o ser como exercício — que trabalhos há que podem ser

(*) NOTA. O assunto não é assim tão simples, como se expõe aqui para cada Q. E. particular, visto que o aluno pode ter certo grau de aptidão ou inaptidão *especial*. A média do Q. E. pode, também, ser diminuída por circunstâncias especiais, v. g., surdez, residência no estrangeiro, raça, aptidão especial para a música, etc.

empregados para medir o aproveitamento ou resultados alcançados, mas não para melhorá-los. Há, porém, um perigo a prevenir, na aplicação de testes. É que os professores tendem a preparar a classe para o teste. Entretanto, o mal não é inerente ao teste. Seja qual fôr a espécie de exame empregado, o mal permanece — pois êsses professores, conciente ou inconcientemente, treinam seus alunos para a prova. Se desejamos treinar para a vida, devemos excluir totalmente das provas por nós organizadas, os problemas fictícios que apareciam nos exames tradicionais. Exames de real valia são os que duram cincoenta anos; as situações que envolvem relacionam-se a acontecimentos e coisas reais; exigem o domínio completo de poucos fatos, ao invés de 60 por cento de eficiência em muitos. Não nos é possível, é certo, dentro das condições da classe, reproduzir integralmente as situações da vida, mas é-nos possível aproximar dela os nossos exames muito mais do que o estiveram até o presente. Os exames, assim como as explicações, exercícios, definições e regras, devem ser feitos para o aprendiz e para a vida.

TEMAS PARA DISCUSSÃO

1. Examinar as escalas de revisão, III, 5, II, 131 e 132 e observar como em cada um dos casos, o teste pode servir, perfeitamente, como teste inventário, embora grosseiro.
2. Que alterações faria o leitor, nas revisões em estudo, afim de utilizá-las como exame?
3. Fazer uma "Escala de Interêsse".
4. Examinar o teste sôbre "ângulo, área e volume" apresentado no livro III, 133 e 134. É, principalmente, um teste-escala ou um teste-inventário?
5. Que se pode testar com êle, além de certos conhecimentos relativos à medição?
6. Organizar um teste-inventário para todas as capacidades mais importantes relativas ao estudo do sistema métrico.
7. Organizar, com frações, um teste de capacidade, obedecendo ao sistema: "Indique a resposta certa".
8. Organizar, com frações, um teste de capacidade na forma "Identidade e diferença".

9. (a) Qual será o objetivo do teste de soma que damos abaixo?

[O teste é impresso. Os papéis são distribuídos pelo verso. Os alunos escrevem o nome; depois, ao sinal "Vamos", viram as fôlhas e começam. Após 40 segundos, o professor diz: "Comecem, agora, B." Após 80 segundos o professor diz: "Agora C." Ao fim de 120, ordena: "Parem." É óbvio dizer que os alunos já devem haver feito testes do mesmo tipo, do contrário, não compreenderiam a necessidade de começar imediatamente, indo direito ao fim e escrevendo ràpidamente os algarismos.]

A. Some 9 a cada número. Escreva as respostas o mais depressa possível.

4	16	43	29
7	28	36	35
3	32	8	17
11	5	24	12
19	56	37	18

B. Some 8 a cada número. Escreva os resultados o mais depressa possível.

7	5	56	29
17	24	19	35
32	12	4	36
3	18	16	38
11	37	43	7

C. Some 7 a cada número. Escreva os resultados o mais depressa possível.

7	4	5	24
38	12	8	56
36	18	17	19
43	37	32	35
16	11	29	3

(b) Que recomenda o leitor que se ensine a cada um dos alunos seguintes (Alberto, Berta e Carlos)?

Alberto efetua 12 operações em A, 13 em B, 12 em C e

acerta 9, 9 e 8 respectivamente.

Berta efetua 12 em A, 12 em B, 14 em C e acerta 12, 12 e 14.

Carlos faz 4 em A, 5 em B, 5 em C e acerta 4, 5 e 5.

(c) Será provável que Carlos some contando nos dedos?

10. Fazer a critica de cada uma das questões de exame apresentadas abaixo, relativamente à analogia que apresentem com questões da vida corrente.

a. Simplificar $\dfrac{3 \times \frac{2}{7} \times 4{,}2}{\frac{5}{15} \times \frac{20}{27}}$.

b. Dividir $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ de $7\frac{1}{5}$ por $3\frac{2}{9}$.

c. Achar o menor multiplo comum de 153, 204 e 510.

d. Definir as expressões numerador, denominador, divisor, fator, proporção.

e. Um homem comprou um relógio com corrente por $140. Metade do custo do relógio eqüivale a $\frac{2}{3}$ do custo da corrente. Quanto custou cada um?

f. Um rapaz tinha uma vara de 20 pés de comprimento. Quebrou-lhe um pedaço que corresponde a 15 por cento da vara.
Quantos por cento do todo restam?
A quantos por cento da parte que ficou corresponde a parte quebrada?
A quantos por cento da parte quebrada corresponde a parte que ficou?

g. A e B acham-se a uma distância de 48 milhas e caminham um para o outro: A caminha $2\frac{1}{2}$ milhas por hora e B $3\frac{1}{3}$ no mesmo tempo. Que distância terá percorrido B, quando se encontrarem?

h. Um campo circular mede 20 acres. Qual é a sua circunferência?

i. Achar em alqueires a capacidade de uma carroça de 10 pés de comprimento, 42 pol. de largura e 4 pés de altura. Admita que seja 2150,42.

j. Se $\frac{5}{8}$ de $\frac{2}{3}$ de um terreno custam $420.00, qual será o valor do terreno todo?

ÍNDICE

Página

EDIÇÃO
N.º 584

Para pedidos telegraficos deste livro, basta indicar o numero 584 *antepondo* a esse numero a quantidade.
Exemplo: para pedir 10 exemplares do presente livro basta indicar:
GLOBO — Pôrto Alegre — 10584

MANUAIS GLOBO

Bibliotheca de iniciação cultural e profissional

PLANO GERAL

CONHECIMENTOS INSTRUMENTARIOS

Secção I — Sciencias psychologicas e lexicologicas.
Secção II — Sciencias das medidas e do cálculo.
Secção III — Sciencias dos inst. e doc. graphicos.
Secção IV — Sciencias pedagogicas.

CONHECIMENTOS THEORICOS

Secção V — Conhecimento analytico } dos phenomenos do universo.
Secção VI — Conhecimento synthetico } dos phenomenos do universo.
Secção VII — Conhecimento dos phenomenos humanos.
Secção VIII — Conhecimento dos phenomenos metaphysicos.

CONHECIMENTOS PRATICOS

Secção IX — Conhecimentos de utilidade religiosa.
Secção X — Conhecimentos de utilidade moral.
Secção XI — Conhecimentos de util. intellec. e esthetica.
Secção XII — Conhecimentos de utilidade physica.
Secção XIII — Technologia geral.

GRANDES LIVROS

MINHA LUTA — Adolf Hitler — Memórias do homem que hoje é a primeira figura no scenario politico da Allemanha. O livro da actualidade. Vol. broch. 20$; enc. 25$.

LENINE & GANDHI — René Filöp Miller — Dois notaveis estudos sôbre Lenine e Gandhi. Revelações intereassantissimas. Commentario brilhante. Vol. broch. 20$; enc. 25$.

GUILHERME II — Emil Ludwig — A mais completa biographia do Kaiser. Pelo maior dos biographos da actualidade. Um livro substancioso e bello. Vol. broch. 20$; enc. 25$.

LINCOLN — Emil Ludwig — Outra biopraphia admiravel. O presidente norte-americano e a sua vida gloriosa numa historia bem contada. Vol. broch. 20$; enc. 25$.

CONTRAPONTO — Aldous Huxley — Um dos maiores livros do nosso seculo. Romance de idéias. Brilhante e original. Dois Vols. broch. 15$.
Dois Vols. enc. 23$.

O MUNDO EM QUE VIVEMOS — H. Van Loon — Geographia Graphica da Humanidade. A geographia com interêsse novelesco. Illustrações do autor. Vol. broch. 20$; enc. 25$.

A HISTORIA DA HUMANIDADE — H. Van Loon — A historia do homem na terra. Com desenhos do autor. Eschemas originaes. Simplicidade, clareza e humor. Vol. broch. 20$; enc. 25$000.

COMPRANDO ESTES SETE LIVROS VSA. FICARÁ EM DIA COM A LITERATURA E A VIDA MODERNA.

Edições da Livraria do Globo — Porto Alegre
1416 — Rua dos Andradas — 1416